수리 영역

가형

1. ⑤	2. ④	3. ⑤	4. ⑤	5. ②
6. ①	7. ③	8. ④	9. ③	10. ②
11. ③	12. ④	13. ④	14. ⑤	15. ⑤
16. ③	17. ④	18. ②	19. ①	20. ①
21. ⑤	22. 97	23. 45	24. 200	25. 25
26. 9	27. 14	28. 252	29. 25	30. 77

1. $AB+B=\begin{pmatrix}3&1\\-1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&0\\3&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2&0\\3&1\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}9&1\\4&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&0\\3&1\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}11&1\\7&3\end{pmatrix}$

따라서, 행렬 $AB+B$의 모든 성분의 합은 22이다.

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3^{n+1}+3^{10}}{3^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(3+\dfrac{3^{10}}{3^n}\right)$

$=3+0=3$

3. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{3x}-1}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{3x}-1}{3x}\cdot3$에서

$3x=t$로 놓으면 $x\to0$일 때 $t\to0$이므로

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{3x}-1}{3x}\cdot3=3\lim\limits_{t\to0}\dfrac{e^t-1}{t}$

$=3\times1=3$

4. 주어진 식의 양변을 제곱하여 정리하면

$x+2\sqrt{x(9-x)}+(9-x)=9\iff2\sqrt{x(9-x)}=0$

$\iff x(9-x)=0\quad\therefore x=0$ 또는 $x=9$

이때 두 근은 주어진 식을 모두 만족하므로 구하는 실근의 합은 9이다.

5. 주어진 그래프는 꼭짓점의 개수가 4, 변의 개수가 6인 그래프이다.

ㄱ의 그래프는 꼭짓점의 개수는 4, 변의 개수는 5이다.

ㄴ의 그래프는 꼭짓점의 개수는 4, 변의 개수는 6이고, 주어진 그래프와 연결 상태가 같다.

ㄷ의 그래프는 꼭짓점의 개수가 5개, 변의 개수가 8이다.

따라서, 같은 그래프는 ㄴ뿐이다.

6. $2^x=t$라 두면 $t>0$

$f(x)=4^x-2^{x+2}-1$

$=t^2-4t-1$

$=(t-2)^2-5$

따라서, 함수 $f(x)$는 $t=2$ 즉, $x=1$일 때, 최솟값 -5를 갖는다.

7. $\tan A=2$에서 $\sin A=\dfrac{2}{\sqrt5}$, $\cos A=\dfrac{1}{\sqrt5}$이고

$\cos(A-B)=\cos A\cos B+\sin A\sin B$

$=\dfrac{1}{\sqrt5}\cos B+\dfrac{2}{\sqrt5}\sin B=\dfrac{2\sqrt2}{3}$

$\therefore 6\sin B+3\cos B=2\sqrt{10}$

8. $\cos^2x=\dfrac{1+\cos2x}{2}=\dfrac{1+\sin\frac{5}{18}\pi}{2}$에서

$\cos2x=\sin\dfrac{5}{18}\pi=\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{4}{18}\pi\right)=\cos\dfrac{2}{9}\pi$

$\therefore 2x=2n\pi\pm\dfrac{2}{9}\pi$

$\therefore x=n\pi\pm\dfrac{\pi}{9}$

이때 $0<x<\pi$이므로 $x=\dfrac{\pi}{9}$ 또는 $x=\dfrac{8}{9}\pi$

$\therefore \alpha=\dfrac{\pi}{9}$ 또는 $\beta=\dfrac{8}{9}\pi$

$\therefore \beta-\alpha=\dfrac{7}{9}\pi$

[다른 풀이]

$\cos^2x=\dfrac{1+\sin\frac{5}{18}\pi}{2}=\dfrac{1+\cos\frac{2}{9}\pi}{2}=\cos^2\dfrac{\pi}{9}$

$\cos x=\cos\dfrac{\pi}{9}$ 또는 $\cos x=-\cos\dfrac{\pi}{9}=\cos\dfrac{8}{9}\pi$

$\therefore x=\dfrac{\pi}{9}$ 또는 $x=\dfrac{8}{9}\pi$

9. $f'(x)=\pi\left(\cos\pi x+\cos\dfrac{\pi}{2}x\right)$

$=\pi\left(2\cos^2\dfrac{\pi}{2}x-1+\cos\dfrac{\pi}{2}x\right)$

$=\pi\left(2\cos\dfrac{\pi}{2}x-1\right)\left(\cos\dfrac{\pi}{2}x+1\right)=0$

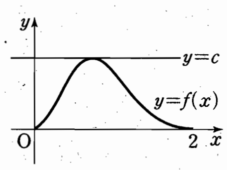
$\therefore \cos\dfrac{\pi}{2}x=\dfrac{1}{2}$ 또는 $\cos\dfrac{\pi}{2}x=-1$

$0\le x\le2$에서 $x=\dfrac{2}{3}$ 또는 $x=2$

이때 증감표를 그리면

x	0	$\cdots$	$\frac{2}{3}$	$\cdots$	2
$f'(x)$		+	0	−	0
$f(x)$	0	↗	극대	↘	0

$y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고 상수 c의 값은 함수 $f(x)$의 극댓값을 의미한다.



따라서, 구하는 값은

$c=f\left(\dfrac{2}{3}\right)=\sin\dfrac{2}{3}\pi+2\sin\dfrac{\pi}{3}$

$=\dfrac{3\sqrt3}{2}$

10. $f(x)=\dfrac{x-1}{|x|}$이므로

$\therefore f(x)=\begin{cases}1-\dfrac{1}{x} & (x>0)\\ -1+\dfrac{1}{x} & (x<0)\end{cases}$

$f'(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x^2} & (x>0)\\ -\dfrac{1}{x^2} & (x<0)\end{cases}$

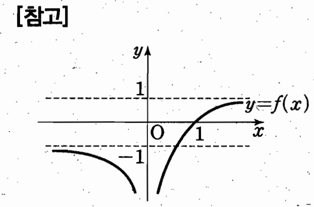
ㄱ. 0이 아닌 모든 실수 x에 대하여 $f(x)<1$이므로 $f(2012)<1$이다. $\therefore$ 참

ㄴ. 위의 도함수 $f'(x)$에서 $f'(-x)=-f'(x)\,(x\ne0)$이다. $\therefore$ 참

ㄷ. $y=f(x)$의 그래프는 $x<0$일 때 감소하고, $x>0$일 때 증가하지만 $x=0$에서 불연속이므로 극값은 존재하지 않는다. $\therefore$ 거짓

따라서, 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

[참고]



11. 각각의 표를 행렬로 나타낸 것을 차례로 A, B, C라고 하면

$A=\begin{pmatrix}1200&2000\\1000&2500\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}7600&10400\\8000&12000\end{pmatrix}$

이고 문제의 뜻으로부터 $AB=C$이다.

$\begin{pmatrix}1200&2000\\1000&2500\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7600&10400\\8000&12000\end{pmatrix}$

$100\begin{pmatrix}12&20\\10&25\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}=100\begin{pmatrix}76&104\\80&120\end{pmatrix}$

$\therefore \begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}12&20\\10&25\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}76&104\\80&120\end{pmatrix}$

$=\dfrac{1}{100}\begin{pmatrix}25&-20\\-10&12\end{pmatrix}\begin{pmatrix}76&104\\80&120\end{pmatrix}$

$\therefore p+q=25+12=37$

12. ㄱ. $\log_2(17+1)\ne4$이므로 $(17,4)\notin A$ $\quad\therefore$ 거짓

ㄴ. $\log_2(2^a-1+1)=\log_2 2^a=a\log_2 2=a$이므로

$(2^a-1,a)\in A\quad\therefore$ 참

ㄷ. $(a,b)\in A$, $(c,d)\in A$이므로

$\log_2(a+1)=b$, $\log_2(c+1)=d$

두 등식을 변끼리 더하면

$\log_2(a+1)+\log_2(c+1)=b+d$

$\therefore \log_2\{(a+1)(c+1)\}=b+d$

$\iff \log_2(ac+a+c+1)=b+d$

$\therefore (ac+a+c,\,b+d)\in A\quad\therefore$ 참

따라서, 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

13. 부등식 $\dfrac{x^2+4x}{x^2-9x}\le0$의 해는

$(x+4)(x-9)\le0$, $x\ne0$, $x\ne9$

$\therefore -4\le x<0$ 또는 $0<x<9$

부등식 $\dfrac{x-3}{|x|-3}\le2$의 해는

(i) $x\ge0$일 때, $x\ne3$이면 $\dfrac{x-3}{x-3}=1\le2$이므로 항상 성립한다.

$\therefore 0\le x<3$ 또는 $x>3$

(ii) $x<0$일 때,

$\dfrac{x-3}{-x-3}-2\le0$, $\dfrac{3x+3}{-x-3}\le0$

$\iff 3(x+3)(x+1)\ge0$, $(x\ne-3)$

$\therefore x<-3$ 또는 $-1\le x<0$

따라서, 두 부등식을 만족시키는 정수 x의 값의 범위는 $-4\le x<-3$ 또는 $-1\le x<0$ 또는 $0<x<3$ 또는 $3<x<9$이므로 구하는 정수 x의 집합은

$\{-4,-1,1,2,4,5,6,7,8\}$

이고, 구하는 개수는 9(개)이다.

14. 두 점 P_n, Q_n의 좌표를 차례로 구해보면

$\{P_n\}:(1,0)\to(2,1)\to(4,2)\to(6,4)\to(9,6)\to$

$\{Q_n\}:(0,1)\to(1,2)\to(2,4)\to(4,6)\to(6,9)\to$

즉, 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$을 나열해보면

$\{a_n\}:1,2,4,6,9,12,16,20,25,\cdots$

$\{b_n\}:0,1,2,4,6,9,12,16,20,\cdots$

따라서, $a_1=1$, $b_1=0$이고, $a_n=b_{n+1}$이므로

$a_{25}=b_{26}=1+(1+2+2+3+3+\cdots+12+12)+13$

$=169$

$\therefore a_{25}+b_{26}=169+169=338$

[다른 풀이]

점 P_n의 y좌표는 Q_n의 x좌표이므로 $P_n(a_n,b_n)$으로 놓을 수 있다.

주어진 규칙에 따라 진행하여 보면

$P_n(a_n,b_n)\to Q_n(b_n,a_n)\to P_{n+1}(b_n+n+1,a_n)$

$\to Q_{n+1}(a_n,b_n+n+1)$

이므로

$b_{n+1}=a_n$

$a_1=1$, $a_{n+1}=b_n+n+1=a_{n-1}+n+1$ $\cdots\cdots$ ㉠

이다.

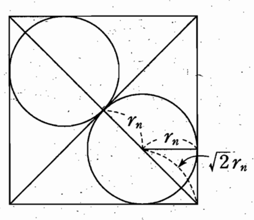
㉠에서 $n=2,4,6,\cdots,24$를 차례로 대입하여 보면

$$\left.\begin{aligned} a_1&=1\\ a_3&=a_1+3\\ a_5&=a_3+5\\ &\ \vdots\\ +)\ a_{25}&=a_{23}+25 \end{aligned}\right]\ \text{변변을 더하면}$$

$a_{25}=1+3+5+\cdots+25=169$

$\therefore a_{25}+b_{26}=a_{25}+a_{25}=338$

15. [그림 n]에서 새로 그린 원의 반지름의 길이를 r_n이라 하자.



먼저 r_1을 구하면

$r_1+\sqrt{2}r_1=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$r_1=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\times\dfrac{1}{1+\sqrt{2}}$

$=\dfrac{2-\sqrt{2}}{2}$

위의 그림에서 반지름의 길이가 r_n인 원에 내접하는 정사각형의 한 변의 길이는 $\sqrt{2}r_n$이므로

$r_n=r_{n+1}+\sqrt{2}r_{n+1}=(1+\sqrt{2})r_{n+1}$

$r_{n+1}=\dfrac{r_n}{1+\sqrt{2}}=(\sqrt{2}-1)r_n$

따라서, 수열 $\{r_n\}$은 첫째항이 $r_1=\dfrac{2-\sqrt{2}}{2}$, 공비가 $\sqrt{2}-1$인 등비수열이므로 수열 $\{l_n\}$은 첫째항이 $2\times2\pi r_1=2(2-\sqrt{2})\pi$, 공비가 $2(\sqrt{2}-1)$인 등비수열이다.

$\therefore \dfrac{2(2-\sqrt{2})\pi}{1-2(\sqrt{2}-1)}=\dfrac{2(2-\sqrt{2})\pi}{3-2\sqrt{2}}$

$=2(3+2\sqrt{2})(2-\sqrt{2})\pi$

$=2(2+\sqrt{2})\pi$

16. $x'(t)=\dfrac{(t-1)(2t^2+5t+5)}{(t+1)^2}=0$에서 $2t^2+5t+5>0$이므로 $t=1$

따라서, 구하는 점 P의 위치는

$x(1)=\dfrac{1+5}{1+1}=3$

17. $y=a^{x+b}$이 두 점 (0, 4), (2, 1)을 지나므로

$a^b=4,\ a^{2+b}=a^2\cdot a^b=1$

$a^2=\dfrac{1}{4}\qquad \therefore a=\dfrac{1}{2},\ b=-2$

$\therefore y=\log_a bx=\log_{\frac{1}{2}}(-2x)=-\log_2(-2x)$

$=-\{\log_2(-x)+1\}=-\log_2(-x)-1$

이것은 $y=\log_2 x$의 그래프를 원점에 대하여 대칭이동한 후 y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 그래프 ④이다.

18. $n=k+1$일 때,

$S_{k+1}=S_k+(-1)^{k+2}\boxed{(k+1)^2}$

$=-S_{k-1}+(-1)^{k+1}k+(-1)^{k+2}\boxed{(k+1)^2}$

$=-\{S_{k-1}+(-1)^{k+1}k^2\}+(-1)^{k+1}$

$\{\boxed{k^2+k}-\boxed{(k+1)^2}\}$

$=-S_k-(-1)^{k+1}(k+1)$

$=-S_k+(-1)^{k+2}(k+1)$

이므로 $f(k)=(k+1)^2,\ g(k)=k^2+k$

$\therefore f(2)+g(2)=9+6=15$

19. $\angle ACB=\angle BCD=\theta$로 놓으면

$\sin\theta=\dfrac{1}{\sqrt{5}},\ \cos\theta=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$이고

$\dfrac{8}{\overline{AC}}=\sin2\theta=2\sin\theta\cos\theta=\dfrac{4}{5}$

$\therefore \overline{AC}=10$

20. $\angle POB=\theta$라 하면

$\overline{PA}=10\cos\theta,\ \overline{PB}=5\sin\theta$

$\overline{QC}=2\cos\theta,\ \overline{QD}=4\sin\theta$

$\overline{PA}+\overline{PB}+\overline{QC}+\overline{QD}=9\sin\theta+12\cos\theta$

$=15\sin(\theta+\alpha)\left(\text{단, }\tan\alpha=\dfrac{4}{3}\right)$

따라서, 구하는 최댓값은 $\theta+\alpha=\dfrac{\pi}{2}$일 때, 15이다.

21. 주어진 곡선 위의 임의의 점 X의 좌표를 (x, y)라 하면 $y=x+\dfrac{a}{x}$이므로 $\overline{OX}^2=x^2+x^2+2a+\dfrac{a^2}{x^2}$이고, 산술-기하 평균에 의하여

$\overline{OX}^2\ge2a+2\sqrt{2x^2\cdot\dfrac{a^2}{x^2}}=2(\sqrt{2}+1)a$

따라서, $\overline{OX}^2$은 $2x^2=\dfrac{a^2}{x^2}$, 즉 $\dfrac{a}{x^2}=\sqrt{2}$일 때, 최솟값을 가지므로 $\overline{OP}^2=2(\sqrt{2}+1)a$이다.

ㄱ. $\overline{OP}=1$이면 $2(\sqrt{2}+1)a=1$이므로 $a=\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}$이다.

$\therefore$ 참

ㄴ. 점 P에서의 접선의 기울기는

$y'=1-\dfrac{a}{x^2}=1-\sqrt{2}$(일정)$\left(\because \dfrac{a}{x^2}=\sqrt{2}\right)\quad\therefore$ 참

ㄷ. 직선 OP의 기울기는 $\dfrac{y}{x}=1+\dfrac{a}{x^2}=1+\sqrt{2}$이고

(직선 OP의 기울기)×(직선 AB의 기울기)

$=(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})=-1$

에서 두 직선은 서로 수직이다. $\quad\therefore$ 참

따라서, ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

22. $a_{n+1}-a_n=5$이므로

$a_n=2+(n-1)\cdot5$

$=5n-3$

$\therefore a_{20}=5\cdot20-3=97$

23. $y=-3^x$를 y축에 대하여 대칭이동하면 $y=-3^{-x}$, 다시 이를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 -5만큼 평행이동하면 $y=-3^{-(x-2)}-5$

$y=-9\cdot3^{-x}-5$

$\therefore a=-9,\ b=-5$

$\therefore ab=45$

24. 무한급수 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n}{2n+1}-5\right)$가 수렴하므로

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{2n+1}-5=0$

이어야 한다.

$\displaystyle\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{2n+1}=5$

$\displaystyle\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{100a_n}{a_n-5n}=100\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{a_n}{2n+1}}{\frac{a_n}{2n+1}-\frac{5n}{2n+1}}$

$=100\times\dfrac{5}{5-\frac{5}{2}}$

$=100\times2=200$

25. (가)에서 (분모) → 0 이면 (분자) → 0 이므로 $f(3)=1$

$\therefore g(1)=3$

(나)에서 (분자) → 0 이면 (분모) → 0 이므로 $g(1)=b$

$\therefore b=3$

또한, $a=f'(3)=\dfrac{1}{g'(1)}=5$이므로 구하는 값은

$a\cdot f'(b)=5\cdot f'(3)=5\times5=25$

26. $\angle POA=\theta$라 하면 $\sin\theta=\dfrac{1}{3}$에서 $\tan\theta=\dfrac{1}{2\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$이고, $\angle APB=2\theta$이므로

$\overline{PA}=\overline{OA}\tan\theta=\overline{AB}\tan\left(\dfrac{\pi}{2}-2\theta\right)=\dfrac{\overline{AB}}{\tan2\theta}$

$\dfrac{\overline{AB}}{\overline{OA}}=\tan\theta\cdot\tan2\theta$

$=\tan\theta\left(\dfrac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}\right)$

$=\dfrac{\sqrt{2}}{4}\left(\dfrac{2\cdot\frac{\sqrt{2}}{4}}{1-\frac{1}{8}}\right)$

$=\dfrac{2}{7}$

$\therefore p+q=9$

27. (i) $a_n=(x-2)(x-3)^n$이 수렴하기 위해서는

$x-2=0$ 또는 $-1<x-3\le1$

따라서, $x=2$ 또는 $2<x\le4$이므로 이를 만족하는 정수 $x=2, 3, 4$이다.

$\therefore p=2+3+4=9$

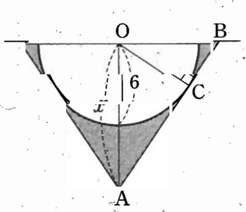
(ii) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}a_k$가 수렴하기 위해서는 $x-2=0$ 또는 $-1<x-3<1$

따라서, $x=2$ 또는 $2<x<4$이므로 이를 만족하는 정수 $x=2, 3$이다.

$\therefore q=2+3=5$

$\therefore p+q=9+5=14$

28. 오른쪽 그림에서



$\overline{AC}\cdot\overline{AB}=x^2$에서

$\overline{AB}=\dfrac{x^2}{\overline{AC}}=\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2-6^2}}$

$\therefore \overline{OB}=\dfrac{6x}{\sqrt{x^2-6^2}}$

따라서, 입체도형의 부피 V는

$V=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{6^2\pi x^3}{x^2-6^2}-\dfrac{2}{3}\cdot6^3\pi=\dfrac{12\pi x^3}{x^2-36}-144\pi$

$\dfrac{dV}{dx}=\dfrac{12\pi x^2(x^2-108)}{(x^2-36)^2}$

$=\dfrac{12\pi x^2(x+6\sqrt{3})(x-6\sqrt{3})}{(x^2-36)^2}=0$

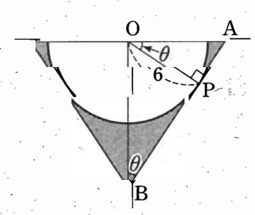
에서 V는 $x=6\sqrt{3}$일 때 최소이다.

따라서, 구하는 최소 부피는 $(108\sqrt{3}-144)\pi$이다.

$\therefore p+q=108+144=252$

[다른 풀이]

그림과 같이 곡선(반원)에 접하는 직선의 접점을 P, $\overline{OA}=a$, $\overline{OB}=b$, $\angle AOP=\theta$라 하면



$a\cos\theta=6,\ b\sin\theta=6$

$\therefore a=\dfrac{6}{\cos\theta},\ b=\dfrac{6}{\sin\theta}$

따라서, 구하는 부피 V는

$$V=\frac{1}{3}\pi a^2b-\frac{2\pi}{3}6^3=\frac{72\pi}{\cos^2\theta\sin\theta}-144\pi$$

이때 $f(\theta)=\cos^2\theta\sin\theta$로 놓으면 $f(\theta)$가 최대일 때 V가 최소가 된다.

$$\begin{aligned} f'(\theta)&=2\cos\theta(-\sin\theta)\sin\theta+\cos^2\theta\cos\theta \\ &=\cos\theta(-2\sin^2\theta+\cos^2\theta) \\ &=-\cos\theta(3\sin^2\theta-1) \\ &=-\cos\theta(\sqrt{3}\sin\theta+1)(\sqrt{3}\sin\theta-1)\left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right) \end{aligned}$$

에서 $\sin\theta=\frac{1}{\sqrt{3}}$일 때 $\left(\cos^2\theta=\frac{2}{3}\right)$, $f(\theta)$는 최대가 되고 V는 최소가 된다.

$$\therefore (V\text{의 최솟값})=\frac{72\pi}{\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}}-144\pi=(108\sqrt{3}-144)\pi$$

$\therefore p=108,\ q=144$

$\therefore p+q=108+144=252$

29. 산영이가 구조대를 만날 때까지 하산한 시간은 $\frac{6}{x+2}$이고, 등환이가 구조대를 만날 때까지 하산한 시간은 $\frac{6}{x+1.5}$이므로

$$\frac{6}{x+1.5}-\frac{6}{x+2}=\frac{1}{6}$$

위의 식을 정리하면

$(2x+3)(x+2)=36,\ 2x^2+7x-30=0$

$(2x-5)(x+6)=0$

$\therefore x=\frac{5}{2}\ (\because x>0)$

따라서, 구하는 값은 $10x=25$이다.

30. 그래프가 직선 l_1인 일차함수를 $f(x)$라 하고, 그래프가 직선 l_2인 일차함수를 $g(x)$라 하면

$a_n=|f(n)-g(n)|$

이다.

그런데, $f(n)-g(n)$은 n에 대한 일차식이므로 수열 $\{f(n)-g(n)\}$은 등차수열이다.

이때, $a_1=16$, $a_{10}=11$이므로 주어진 그림에서

$f(1)-g(1)=16,\ f(10)-g(10)=-11$

이다.

등차수열 $\{f(n)-g(n)\}$의 공차를 d라 하면

$\{f(10)-g(10)\}-\{f(1)-g(1)\}=9d=-27$

이므로 $d=-3$이다.

$$\begin{aligned} \therefore \sum_{n=1}^{10}a_n&=(16+13+\cdots+1) \\ &\quad+(|-2|+|-5|+|-8|+|-11|) \\ &=\frac{6}{2}(16+1)+\frac{4}{2}(2+11) \\ &=51+26=77 \end{aligned}$$

나형

1. ⑤	2. ④	3. ③	4. ③	5. ②
6. ①	7. ④	8. ②	9. ②	10. ③
11. ③	12. ④	13. ③	14. ⑤	15. ⑤
16. ④	17. ④	18. ②	19. ①	20. ①
21. ④	22. 97	23. 45	24. 200	25. 19
26. 40	27. 14	28. 33	29. 6	30. 77

1~2. 가형의 1~2번과 동일

3. $$\lim_{x\to2}\frac{x^2-x-2}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{(x-2)(x+1)}{x-2}=\lim_{x\to2}(x+1)=3$$

4. 첫째항을 a, 공비를 r라 하면

$ar^3\cdot ar^5=4(ar^2)^2$

$a^2r^8=4a^2r^4$

$r^4=4$

$\therefore r=\sqrt{2}\ (\because r>0)$

5~6. 가형의 5~6번과 동일

7. 주어진 연립방정식이 $x=0$, $y=0$ 이외의 해를 갖도록 하려면 행렬 $\begin{pmatrix}k-6 & -2\\ 2 & k-1\end{pmatrix}$의 역행렬이 존재하지 않아야 한다.

$(k-6)(k-1)-(-2)\cdot2=0$

$k^2-7k+10=(k-2)(k-5)=0$

$\therefore k=2$ 또는 $k=5$

따라서, 구하는 상수 k의 값의 합은 $2+5=7$이다.

8. $\lim_{x\to1-0}f(x)=\lim_{x\to1-0}(2x-3)=2-3=-1$

$\lim_{x\to1+0}f(x)=\lim_{x\to1+0}\left(\frac{2}{x}+a\right)=2+a$

$f(1)=2+a$

이때 함수 $f(x)$가 $x=1$에서 연속이므로

$a+2=-1$

이어야 한다.

$\therefore a=-3$

9. $a_n=ar^{n-1}$이라 두면 조건으로부터

$\frac{a}{1-r}=3 \qquad \therefore a=3-3r$ ······ ㉠

$\frac{a^2}{1-r^2}=\frac{9}{2}$

$\therefore \frac{a}{1-r}\cdot\frac{a}{1+r}=3\cdot\frac{a}{1+r}=\frac{9}{2}$

$\therefore 2a=3+3r$ ······ ㉡

㉠, ㉡으로부터 $r=\frac{1}{3}$, $a=2$

$$\begin{aligned} \therefore \sum_{n=1}^{\infty}(a_na_{n+1})&=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{2\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\cdot2\left(\frac{1}{3}\right)^n\right\} \\ &=\sum_{n=1}^{\infty}4\left(\frac{1}{3}\right)^{2n-1} \\ &=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{3}\left(\frac{1}{9}\right)^{n-1} \\ &=\frac{\frac{4}{3}}{1-\frac{1}{9}}=\frac{3}{2} \end{aligned}$$

10. $f(4)=\frac{4-3}{4-2}=\frac{1}{2}$이므로

$a_{11}=f^2(4)=f(f(4))=f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{5}{3}$

$a_{12}=a_{21}=f^3(4)=f(f^2(4))=f\left(\frac{5}{3}\right)=4$

$a_{22}=f^4(4)=f(f^3(4))=f(4)=\frac{1}{2}$

따라서, 행렬 A의 모든 성분의 합은

$\frac{5}{3}+4+4+\frac{1}{2}=\frac{61}{6}$

11~12. 가형의 11~12번과 동일

13. 점 Q의 좌표는 $\left(0,\ \frac{a}{2}\right)$이므로 직선 AQ의 방정식은

$y=\frac{a}{2}x+\frac{a}{2}$ ······ ㉠

한편, 직선 BP의 방정식은

$y=-ax+a$ ······ ㉡

㉠, ㉡을 연립하면

$\frac{a}{2}x+\frac{a}{2}=-ax+a$이므로

$x=\frac{1}{3},\ y=\frac{2}{3}a$

이때 점 R의 좌표는 $\left(\frac{1}{3},\ \frac{2}{3}a\right)$이므로

$\overline{AR}=\sqrt{\left(\frac{4}{3}\right)^2+\left(\frac{2}{3}a\right)^2}=\frac{2}{3}\sqrt{4+a^2}$

$\overline{BR}=\sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{2}{3}a\right)^2}=\frac{2}{3}\sqrt{1+a^2}$

$\therefore \lim_{a\to0}\frac{\overline{BR}}{\overline{AR}}=\lim_{a\to0}\frac{\sqrt{1+a^2}}{\sqrt{4+a^2}}=\frac{\sqrt{1}}{\sqrt{4}}=\frac{1}{2}$

14~15. 가형의 14~15번과 동일

16. ㄱ. $B=E-2A$이므로

$AB=A(E-2A)=A-2A^2$

$BA=(E-2A)A=A-2A^2$

$\therefore AB=BA \qquad \therefore$ 참

ㄴ. 【반례】 $A=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$일 때,

$2A+B=E$이지만 A, B 모두 역행렬을 갖지 않는다.

$\therefore$ 거짓

ㄷ. $AB=O \Longleftrightarrow A(E-2A)=O$

$\therefore 2A^2-A=O$

$\therefore (2A+E)(A-E)+E=O$

$\Longleftrightarrow (2A+E)(A-E)=-E$

따라서, $2A+E$의 역행렬은 $-(A-E)$이다. $\therefore$ 참

따라서, 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

17~18. 가형의 17~18번과 동일

19. ㄱ. $x\to\infty$일 때 $-\frac{1}{x}\to-0$이므로

$\lim_{x\to\infty}f\left(-\frac{1}{x}\right)=\lim_{t\to-0}f(t)=2 \qquad \therefore$ 참

ㄴ. $x\to-\infty$일 때 $-\frac{1}{x}\to+0$이므로 $1-\frac{1}{x}\to1+0$

이다.

$\lim_{x\to-\infty}f\left(\frac{x-1}{x}\right)=\lim_{x\to-\infty}f\left(1-\frac{1}{x}\right)$

$=\lim_{t\to1+0}f(t)=2 \qquad \therefore$ 거짓

ㄷ. $\lim_{x\to-0}f(x)f(-x)=\lim_{x\to-0}f(x)\times\lim_{x\to-0}f(-x)$

$=\lim_{x\to-0}f(x)\times\lim_{t\to+0}f(t)=2\times1=2$

$\lim_{x\to+0}f(x)f(-x)=\lim_{x\to+0}f(x)\times\lim_{x\to+0}f(-x)$

$=\lim_{x\to+0}f(x)\times\lim_{t\to-0}f(t)=1\times2=2$

$\therefore \lim_{x\to0}f(x)f(-x)=2$

그런데, $f(0)f(-0)=1\times1=1$이므로
$\lim_{x\to0} f(x)f(-x)\neq f(0)f(0)$이다.
따라서, 함수 $f(x)f(-x)$는 $x=0$에서 불연속이다.
∴ 거짓
따라서, 옳은 것은 ㄱ 뿐이다.

20. $f(m)=2$이므로 $100\le m\le999$이다.
이때 a_m의 값은 $2^k\times m$의 자릿수가 m의 자릿수보다 크게 되는 자연수 k의 최솟값과 같다.
$100\le m\le124$일 때, $2^3\times m$은 세 자리의 자연수이고, $2^4\times m$은 네 자리의 자연수이므로
$a_m=4$
$125\le m\le249$일 때, $2^2\times m$은 세 자리의 자연수이고, $2^3\times m$은 네 자리의 자연수이므로
$a_m=3$
$250\le m\le499$일 때, $2^1\times m$은 세 자리의 자연수이고, $2^2\times m$은 네 자리의 자연수이므로
$a_m=2$
$500\le m\le999$일 때, $2^0\times m$은 세 자리의 자연수이고, $2^1\times m$은 네 자리의 자연수이므로
$a_m=1$
따라서, 주어진 조건을 만족시키는 자연수 m은
$125\le m\le499$
이므로 $499-125+1=375$개이다.

21. 목돈 1억 원의 10년 후의 가치는
1억$\times1.005^{120}=10^8\times1.8=180,000,000$(원) …… ㉠
매월 말 받는 연금이 a원일 때 10년(120개월) 후의 원리합계는
$$a\times1.005^{119}+a\times1.005^{118}+\cdots+a\times1.005+a$$
$$=\frac{a(1.005^{120}-1)}{1.005-1}=\frac{a(1.8-1)}{0.005}=160a \quad\cdots\cdots ㉡$$
㉠, ㉡으로부터 $160a=180,000,000$
$$\therefore a=\frac{180,000,000}{160}=1,125,000(원)$$
따라서, 매월 말 받게 되는 연금은 112만 5천 원이다.

22~24. 가형의 22~24번과 동일

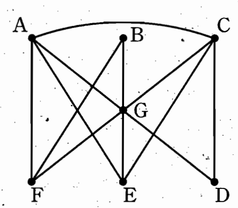
25. $2^{30}<3^n$으로부터
$30\log2<n\log3$
$$\therefore \frac{30\log2}{\log3}<n$$
이때 $\frac{30\log2}{\log3}=\frac{30\times0.3010}{0.4771}=18.92\times\times\times$
이므로 $n>18.92\times\times\times$ 이를 만족하는 자연수 n의 최솟값은 19이다.

26. $\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}=\lim_{x\to0}\frac{f(x)+8x}{x}=a$ (a는 상수)
$\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}=a$이므로 $x\to1$일 때 (분모)$\to0$이므로
(분자)$\to0$ 즉, $f(1)=0$이어야 한다.
따라서, $x-1$은 이차식 $f(x)$의 인수이다.
이때 $\lim_{x\to0}\frac{f(x)+8x}{x}=a$에서 $x\to0$일 때 (분모)$\to0$이므로 (분자)$\to0$ 즉, $f(0)=0$이어야 한다.
따라서, x는 이차식 $f(x)$의 인수이다.
이상에서 $f(x)=kx(x-1)$(k는 상수)로 놓을 수 있다.
$$a=\lim_{x\to1}\frac{kx(x-1)}{x-1}=\lim_{x\to1}kx=k,$$
$$a=\lim_{x\to0}\frac{kx(x-1)+8x}{x}=\lim_{x\to0}\{k(x-1)+8\}=-k+8$$
이므로
$k=-k+8$ $\quad\therefore k=4$
$\therefore 10a=40$

27. 가형의 27번과 동일

28. $a_1=S_1=1^2+\frac{1}{1}=2$,
$$a_{11}=S_{11}-S_{10}=\left(6^2+\frac{1}{6}\right)-\left(5+\frac{1}{5+1}\right)=36-5=31$$
$\therefore a_1+a_{11}=2+31=33$

29. 제i행의 성분 중 1의 개수를 b_i라 하면 b_i는 제i행에 대응하는 꼭짓점에 연결된 변의 개수와 같다.
$\therefore a_i=7-b_i$
이때 b_i의 최솟값은 2, 최댓값은 6이므로 a_i의 최댓값은 $7-2=5$이고 최솟값은 $7-6=1$이다.
따라서, a_i의 최댓값과 최솟값의 합은 $5+1=6$이다.
[다른 풀이]
주어진 그래프에 다음과 같이 A~G까지 지정하면 다음과 같다.



위의 그래프의 각 꼭짓점 사이의 연결 관계를 나타내는 행렬 M은 다음과 같이 만들 수 있다.
$$M=\begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \\ D \\ E \\ F \\ G \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} A & B & C & D & E & F & G \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$
이때 제2행과 제4행에서 성분이 0인 개수가 5로 최댓값을 가지고, 제7행에서 성분이 0인 개수가 1로 최솟값을 가진다.
따라서, a_i의 최댓값과 최솟값의 합은 $5+1=6$이다.

30. 가형의 30번과 동일