



Chapter 8. Root Locus Technique

Things to know

- The definition of root locus
- How to sketch the root locus
- How to use the root locus to find the poles of a closed-loop system
- How to use the root locus to design a parameter value to meet a transient response specification



Chapter 8. Root Locus Technique

◆ Chapter Objectives

- The definition of root locus
- How to sketch the root locus
- How to use the root locus

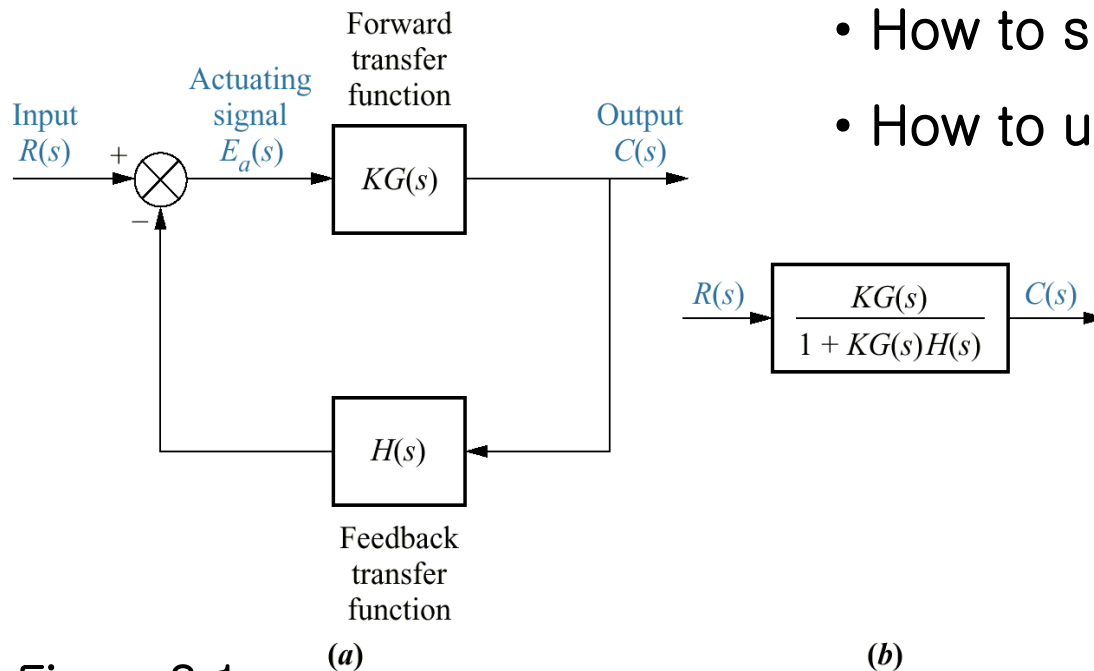
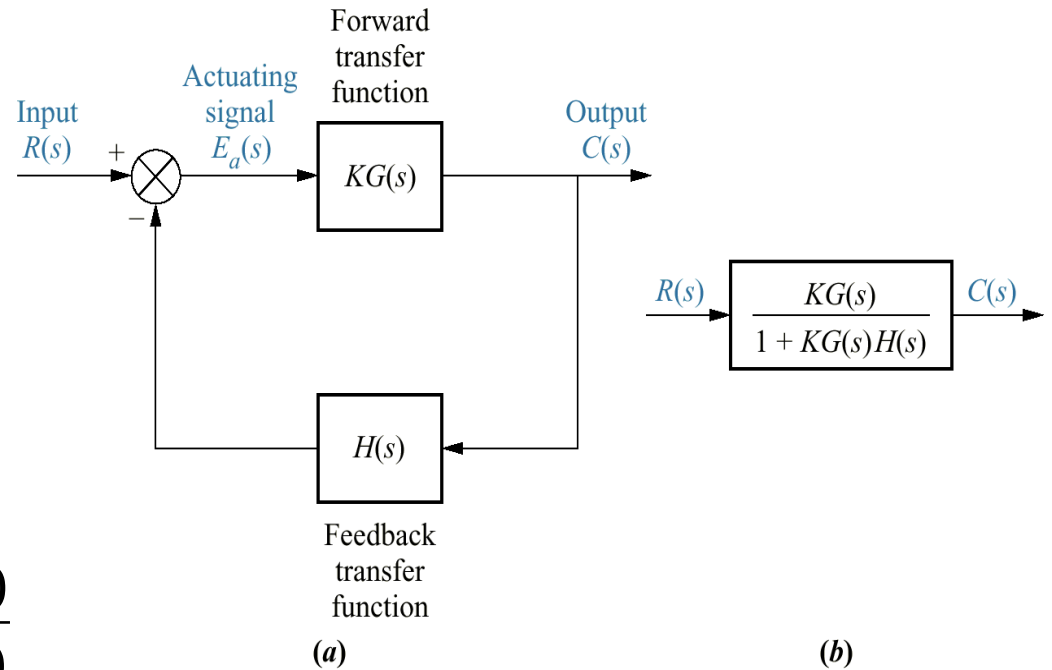


Figure 8.1

- a. Closed-loop system;
b. equivalent transfer function



$$G(s) = K \frac{N_G(s)}{D_G(s)}, \quad H(s) = \frac{N_H(s)}{D_H(s)}$$

$$T(s) = \frac{KG(s)}{1 + KG(s)H(s)} = \frac{KN_G(s)D_H(s)}{D_G(s)D_H(s) + KN_G(s)N_H(s)}$$

Characteristic Equations

$$D_G(s)D_H(s) + KN_G(s)N_H(s) = 0$$

$K : 0 \rightarrow \infty$ stability?



$$s = \sigma + j\omega = M \angle \theta$$

$$F(s) = (s + a) = (\sigma + a) + j\omega$$

$$F(s) = \frac{\prod_{i=1}^m (s + z_i)}{\prod_{j=1}^n (s + p_j)}$$

$$= \frac{\prod_{i=1}^m \text{numerator's complex factors}}{\prod_{j=1}^n \text{denominator's complex factors}}$$

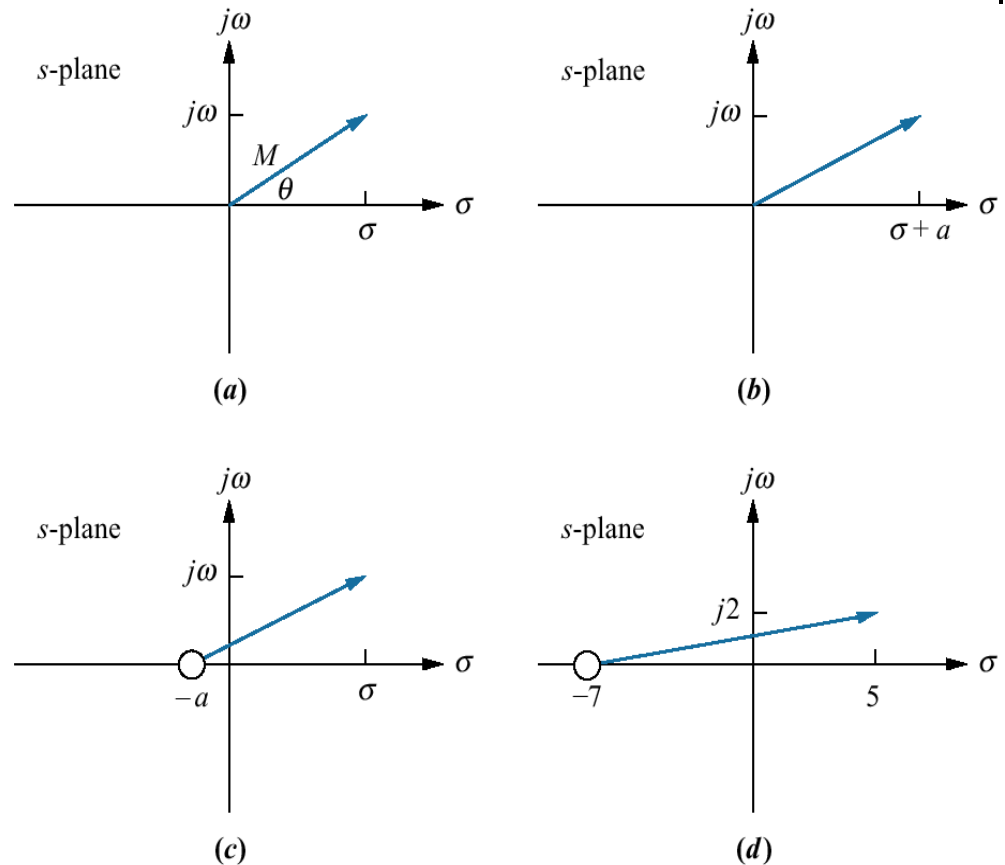


Figure 8.2 Vector representation of complex numbers:

a. $s = \sigma + j\omega$;

b. $(s + a)$;

c. alternate representation of $(s + a)$;

d. $(s + 7) |_{s \rightarrow 5 + j2}$



$$M = \frac{\prod_{i=1}^m \text{zero lengths}}{\prod_{j=1}^n \text{pole lengths}} = \frac{\prod_{i=1}^m |(s + z_i)|}{\prod_{j=1}^n |(s + p_j)|}$$

$$F(s) = \frac{\prod_{i=1}^m (s + z_i)}{\prod_{j=1}^n (s + p_j)} = \frac{\prod_{i=1}^m r_i e^{\theta_i}}{\prod_{j=1}^n r_j e^{\theta_j}} = M \angle \theta$$

$$\theta = \sum \text{zero angles} - \sum \text{pole angles} = \sum_{i=1}^m \angle(s + z_i) - \sum_{j=1}^n \angle(s + p_j)$$

Ex) 8.1 Find $F(s) = \frac{(s+1)}{s(s+2)}$ at the point $s = -3 + j4$

$$F(s) = \left. \frac{(s+1)}{s(s+2)} \right|_{s=-3+j4} = \frac{\sqrt{20} \angle 116.6^\circ}{5 \angle 126.9^\circ \times \sqrt{17} \angle 104.0^\circ}$$

$$\begin{aligned} M \angle \theta &= \frac{\sqrt{20}}{5\sqrt{17}} \angle (116.6^\circ - 126.9^\circ - 104.0^\circ) \\ &= 0.217 \angle (-114.3^\circ) \end{aligned}$$

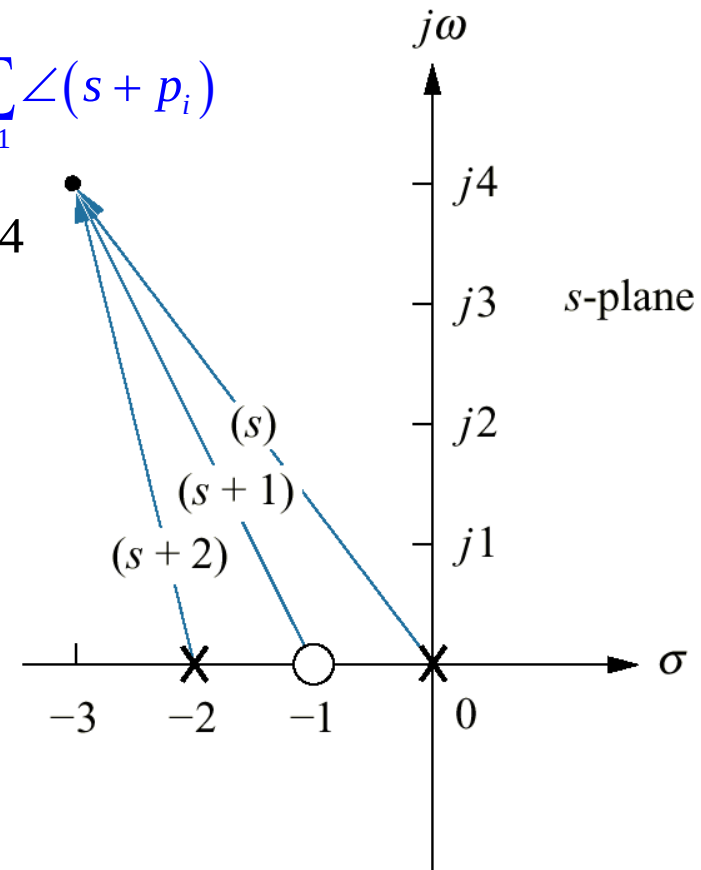


Figure 8.3 Vector representation of Eq. (8.7) |



Courtesy of ParkerVision.

8.2 Defining the Root Locus

Figure 8.4

a. CameraMan®

Presenter Camera System automatically follows a subject who wears infrared sensors on their front and back (the front sensor is also a microphone); tracking

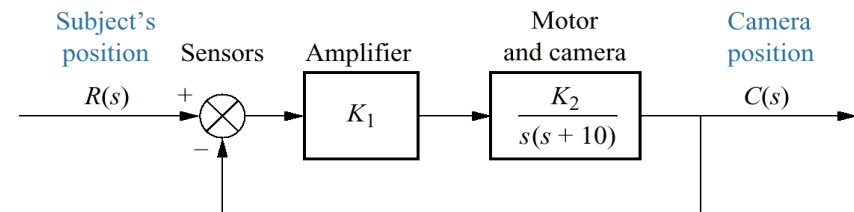
commands and audio are relayed to CameraMan via a radio frequency link from a unit worn by the subject.

b. block diagram.

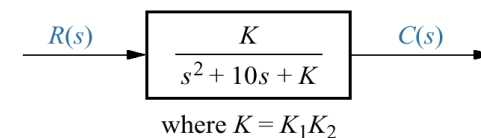
c. closed-loop transfer function.



(a)



(b)



(c)



$$D(s) = s^2 + 10s + K = 0, \quad s_{1,2} = -5 \pm \sqrt{25 - K}$$

Table 8.1 Pole location as a function of gain for the system of Figure 8.4

K	Pole 1	Pole 2
0	-10	0
5	-9.47	-0.53
10	-8.87	-1.13
15	-8.16	-1.84
20	-7.24	-2.76
25	-5	-5
30	$-5 + j2.24$	$-5 - j2.24$
35	$-5 + j3.16$	$-5 - j3.16$
40	$-5 + j3.87$	$-5 - j3.87$
45	$-5 + j4.47$	$-5 - j4.47$
50	$-5 + j5$	$-5 - j5$

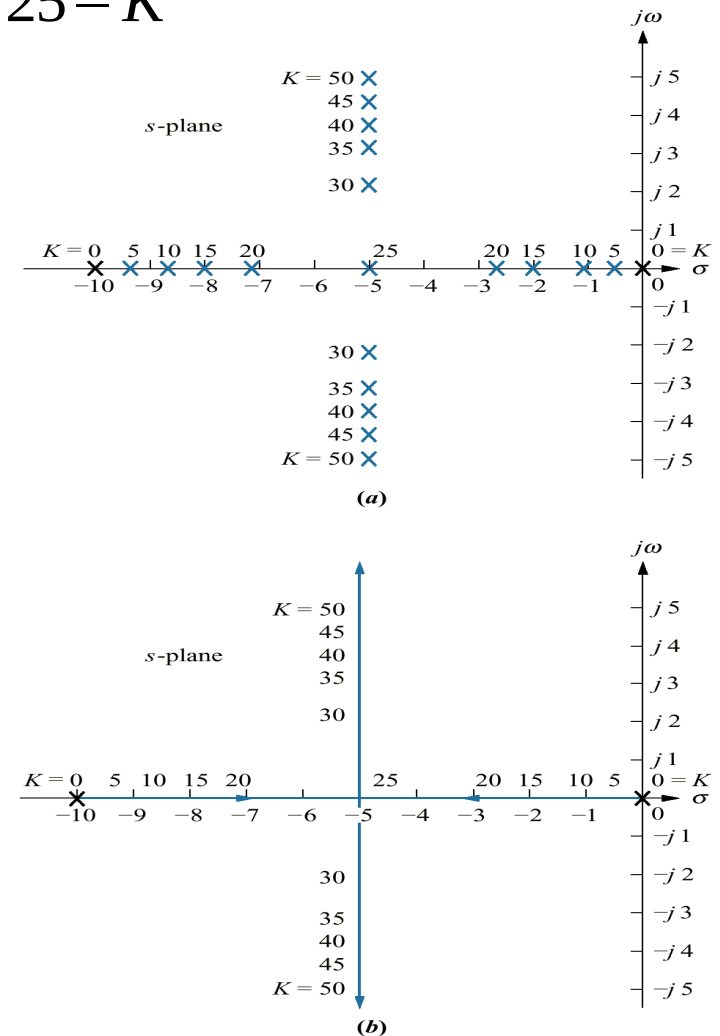


Figure 8.5

a. Pole plot from Table 8.1;

b. root locus



8.3 Properties of the Root Locus

$$T(s) = \frac{KG(s)}{1 + KG(s)H(s)}$$

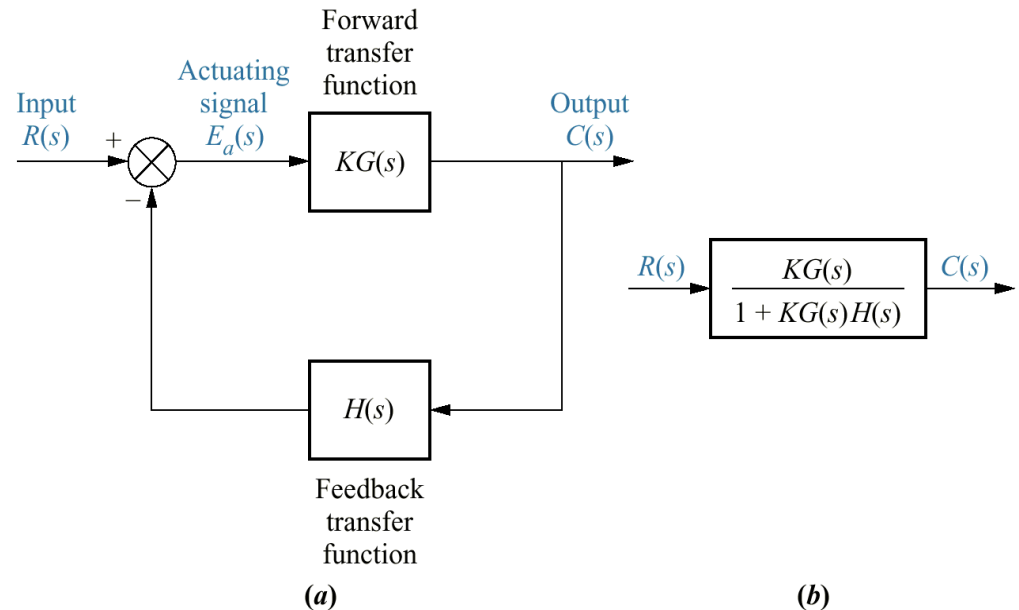
The characteristic polynomial in the denominator

$$KG(s)H(s) = -1 = 1\angle(2k + 1)180^\circ \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$$

$$|KG(s)H(s)| = 1$$

$$\angle KG(s)H(s) = (2k + 1)180^\circ$$

$$K = \frac{1}{|G(s)H(s)|}$$





$$KG(s)H(s) = \frac{K(s+3)(s+4)}{(s+1)(s+2)}$$

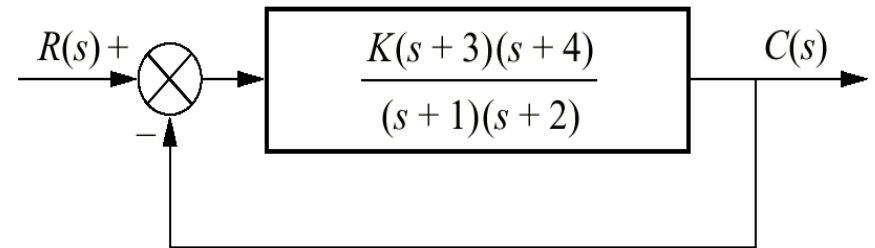
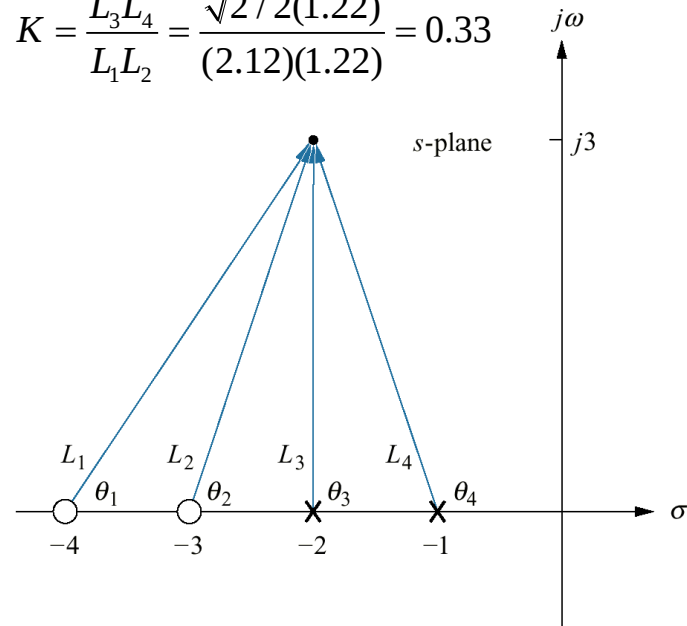
$$T(s) = \frac{K(s+3)(s+4)}{(1+K)s^2 + (3+7K)s + (2+12K)}$$

Consider the point $-2 + j3$ of a closed loop pole for some value of gain.

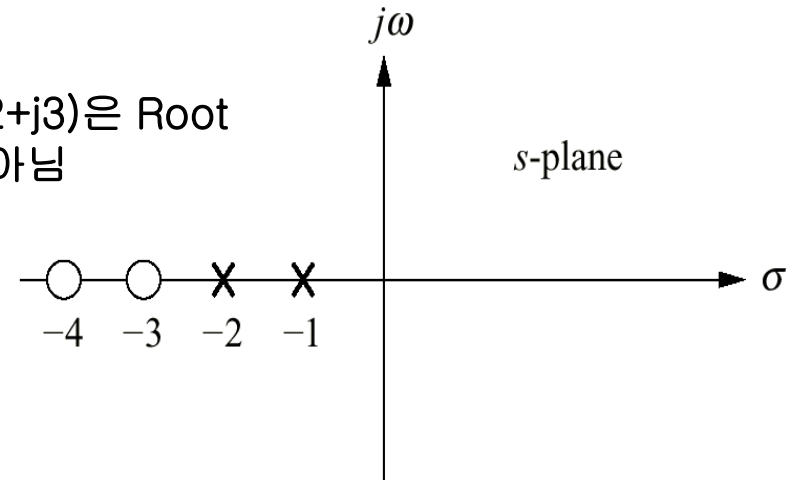
$$\begin{aligned}\theta_1 + \theta_2 - \theta_3 - \theta_4 &= 56.31^\circ + 71.57^\circ - 90^\circ - 108.43^\circ \\ &= -70.55^\circ\end{aligned}$$

$$K = \frac{L_3 L_4}{L_1 L_2} = \frac{\sqrt{2}/2(1.22)}{(2.12)(1.22)} = 0.33$$

따라서 test 점 $(-2+j3)$ 은 Root locus 상의 점이 아님



(a)



(b)

Figure 8.6

- a. Example system;
- b. pole-zero plot of $G(s)$



8.4 Sketching the Root Locus

▶ 근궤적법(root locus method)

s-평면상에 개루프 전달함수의 극점과 영점을 도시하고 이 극점 및 영점의 배치에서 시스템 파라미터 K를 0에서 ∞ 까지 변화시킬 때의 폐루프 특성방정식의 근(폐루프 극점의 위치)를 s-평면상에 작도해 알아내는 도해적인 방법.

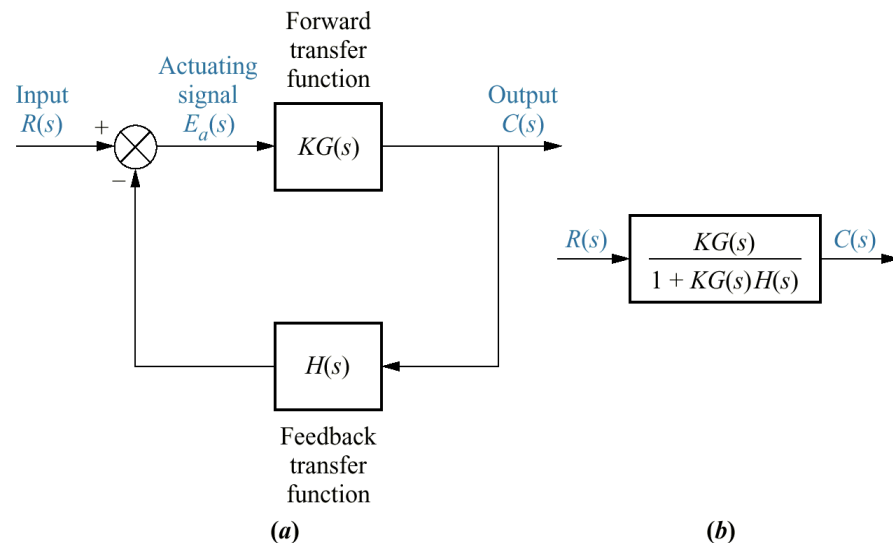
=> 1948년 W. R. Evans(24,25)에 의해 소개

$$T(s) = \frac{KG(s)}{1 + KG(s)H(s)}$$

In the characteristic polynomial in the denominator

$$|KG(s)H(s)| = 1$$

$$\angle KG(s)H(s) = (2k + 1)180^\circ$$



Closed loop control system



▶ 단일 피드백 제어시스템에 대한 근궤적 작도예

$$KG(s) = \frac{K}{s(s+2)}$$

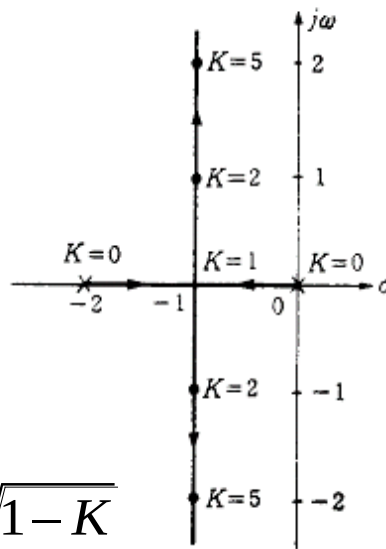
$$T(s) = \frac{K}{s^2 + 2s + K}$$

$$s^2 + 2s + K = 0$$

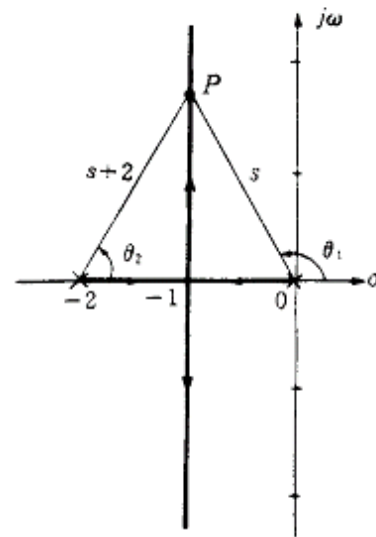
$$s_1 = -1 + \sqrt{1-K}, \quad s_2 = -1 - \sqrt{1-K}$$

$$|KG(s)| = 1$$

$$\angle KG(s) = (2k+1)180^\circ$$



(a)



(b)

시스템 $KG(s) = \frac{K}{s(s+2)}$ 의 근궤적선도

▶ 비최소위상 시스템의 근궤적 작도법

$$|KG(s)| = 1$$

$$\angle KG(s) = k 360^\circ, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$



◆ 근궤적 작도법

1. Number of branches

폐루프 극점의 개수와 근궤적의 수는 같다.

2. Starting and ending points of root locus

근궤적은 $K = 0$ 일 때 개루프 극점에서 출발하여 $K = \infty$ 일 때 개루프 영점에 종착한다.

이때 $KG(s) = K \frac{N(s)}{D(s)}$ 일때 폐루프제어시스템의 특성방정식은

$$1 + KG(s) = 0 \quad \text{혹은} \quad D(s) + KN(s) = 0$$

i) $K = 0$ 일 때 특성방정식을 만족하려면 $D(s) = 0$

$\Rightarrow G(s)$ 의 극점이 특성방정식의 근

ii) $K = \infty$ 이면 $D(s)$ 는 상대적으로 무시 $\Rightarrow N(s) = 0$

즉, 개루프 전달함수 $G(s)$ 의 영점이 특성방정식의 근



3. Real – Axis Segments(실수축상의 근 궤적)

개루프 전달함수 $G(s)$ 의 극점과 영점이 실수축상에 있을 때 근궤적은 임의의 구간에서

실수축의 임의의 점 우측에 있는 개루프 극점과 영점을 합한 개수가

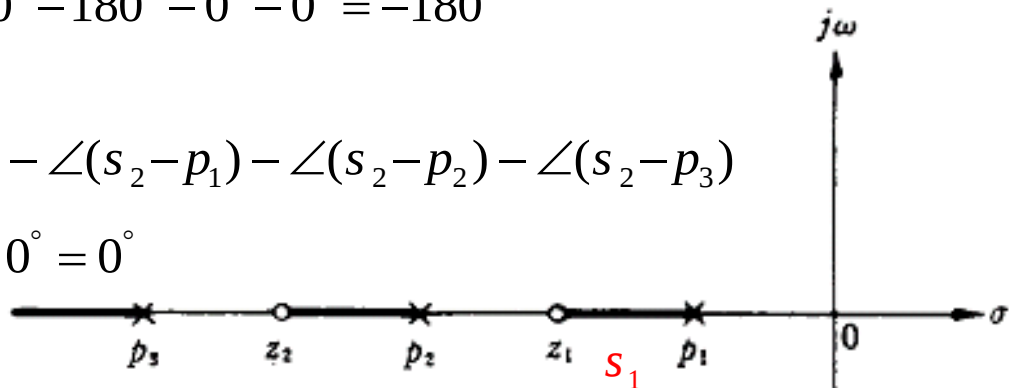
홀수 $\Rightarrow$ 그 구간에 근궤적이 존재

짝수 $\Rightarrow$ 근궤적이 존재하지 않음

$$\begin{aligned} G(s_1) \text{의 위상} \quad \angle G(s_1) &= \angle(s_1 - z_1) + \angle(s_1 - z_2) - \angle(s_1 - p_1) - \angle(s_1 - p_2) - \angle(s_1 - p_3) \\ (p_1 \sim z_1 \text{ 사외}) \quad &= 0^\circ + 0^\circ - 180^\circ - 0^\circ - 0^\circ = -180^\circ \end{aligned}$$

$G(s_2)$ 의 위상 ($z_1 \sim p_2$ 사외)

$$\begin{aligned} \angle G(s_2) &= \angle(s_2 - z_1) + \angle(s_2 - z_2) - \angle(s_2 - p_1) - \angle(s_2 - p_2) - \angle(s_2 - p_3) \\ &= 180^\circ + 0^\circ - 180^\circ - 0^\circ - 0^\circ = 0^\circ \end{aligned}$$



$$G(s) = \frac{K(s - z_1)(s - z_2)}{(s - p_1)(s - p_2)(s - p_3)} \quad \text{의 실수축상의 근궤적}$$



4. Symmetry: 근궤적선도의 대칭성

복소근은 공액근으로서 허수부의 값이 실수축에 대해 대칭이므로 근궤적도 역시 실수축에 대하여 대칭이다.

5. Behavior at infinity: 점근선의 각도와 위치

s가 ∞ 로 접근할 때 근궤적은 점근선(asymptote)을 갖는다.
개루프 극점의 개수가 n개이고 개루프 영점의 개수가 m개인 시스템에서 실수축과 이루는 점근선의 각도 α

$$\alpha = \frac{(2K + 1) 180^\circ}{n - m}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

실수축상에서 점근선들이 모이는 점인

점근선의 중심점 A_c

$$A_c = \frac{\sum_{i=1}^n p_i - \sum_{j=1}^m z_j}{n - m}$$

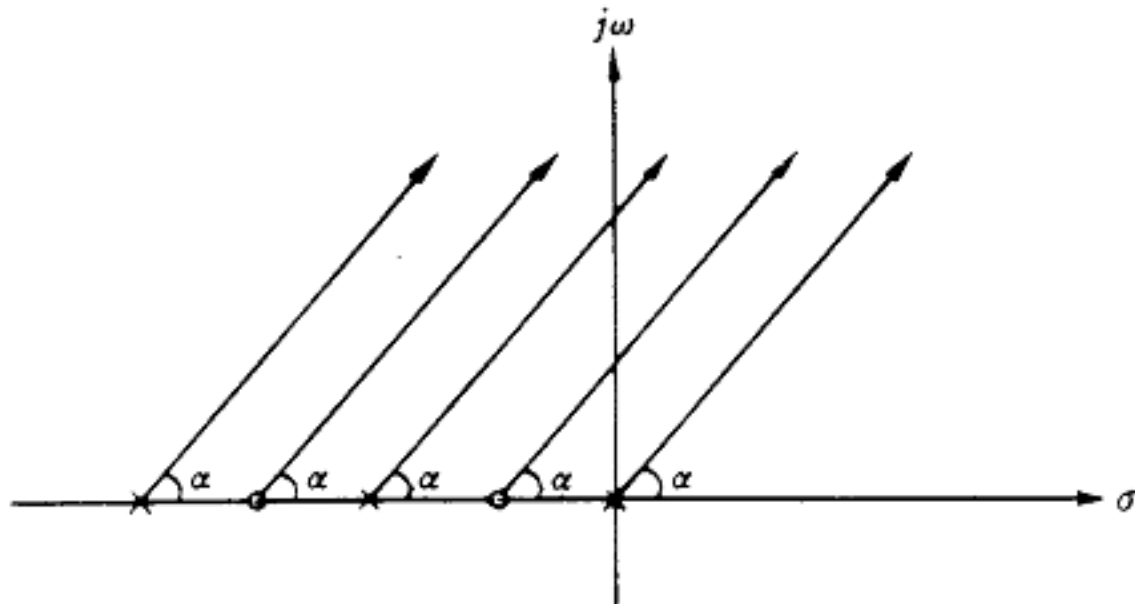


$$\sum_{j=1}^m \theta_{z_j} - \sum_{j=1}^m \theta_{p_j} = (2k+1)180^\circ$$

$$T(s) = \frac{KG(s)}{1 + KG(s)H(s)} = \frac{\prod_{j=1}^m (s - z_j)}{\prod_{i=1}^n (s - p_i^c)}$$

$$m\alpha - n\alpha = (2k+1)180^\circ$$

$$\therefore \alpha = \frac{(2k+1)180^\circ}{n-m}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$





근궤적을 위한 특성방정식

$$(s - p_1)(s - p_2) \cdots (s - p_n) + K(s - z_1)(s - z_2) \cdots (s - z_m)$$

$$= (s - p_1^c)(s - p_2^c) \cdots (s - p_n^c) = s^n - \sum_{i=1}^n p_i^c s^{n-1} + \cdots p_1^c p_2^c \cdots p_n^c = 0$$

또한 $s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1s + a_0 + K(s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \cdots + b_1s + b_0) = 0$

만약 $n > m+1$ 이면, K 값에 관계 없이

$$\sum_{i=1}^n p_i^c = -a_{n-1}$$

또한, 같은 방법으로, 개루프 극점의 합과 영점의 합은

$$\sum_{i=1}^n p_i^c = -a_{n-1}, \quad \sum_{j=1}^m z_j = -b_{m-1} \quad G_c(s) = \lim_{K \rightarrow \infty} \frac{\prod_{j=1}^m (s - z_j)}{\prod_{i=1}^n (s - p_i^c)} \approx \lim_{K \rightarrow \infty} \frac{\prod_{j=1}^m (s - z_j)}{(s - A_c)^{n-m} \prod_{j=1}^m (s - z_j)}$$

이와 같이 $n > m+1$ 이면 페루프 극점의 중심점 A_c 는 K값에 따라 변하지 않으며,

K값이 큰 경우에는

$$\sum_{i=1}^n p_i^c = (n - m)A_c + \sum_{j=1}^m z_j = \sum_{i=1}^n p_i \quad \therefore A_c = \frac{\sum_{i=1}^n p_i - \sum_{j=1}^m z_j}{n - m}$$



[예제 4.1] 다음 개루프 전달함수 $G(s)$ 에 대한 점근선의 각도 α 와 중심점 A_c 를 구하고 근궤적선도는?

$$G(s) = \frac{K}{s(s+2)}$$

개루프 무한 영점의 개수 $n - m = 2 - 0 = 2$

두 개의 점근선이 존재 $\Rightarrow$ 점근선의 각도 α 와 중심점 A_c

$$\alpha = \frac{(2K+1)180^\circ}{n-m} = \frac{(2K+1)180^\circ}{2-0} = \pm 90^\circ$$

$$\therefore A_c = \frac{\sum_{i=1}^n p_i - \sum_{j=1}^m z_j}{n-m} = \frac{-2-0}{2-0} = -1$$

그림 4.5 시스템 $G(s)$ 의 근궤적선도



Ex. 8.2 Sketch the root locus for the system shown in Fig. 8.11

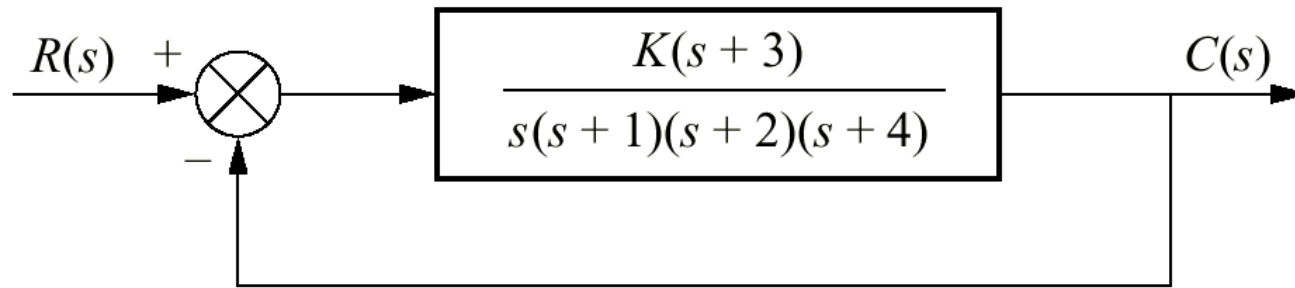


Figure 8.11 System for Example 8.2

Sol) 점근선을 구하면

$$\alpha = \frac{(2K+1)180^\circ}{4-1} = 60^\circ, 180^\circ, 300^\circ$$

$$\therefore A_c = \frac{\sum_{i=1}^n p_i - \sum_{j=1}^m z_j}{n-m} = \frac{(-1-2-4) - (-3)}{4-1} = -\frac{4}{3}$$

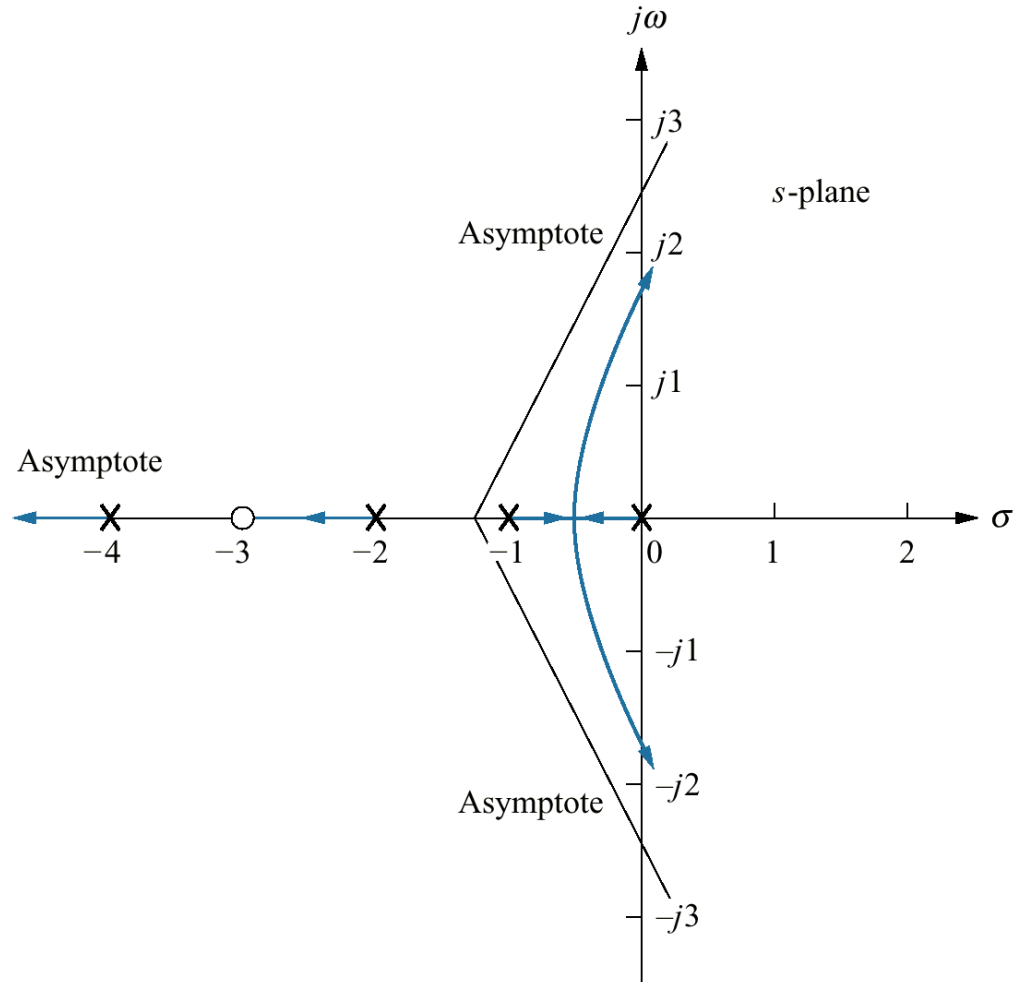


Figure 8.12
Root locus and asymptotes
for the system of Figure 8.11



6. Real-Axis Break-away and Break-in Points: 분기점 위치

두 근궤적이 실수축을 떠나는 이탈점(break-away point)과 도착하는 복귀점(break-in point)을 분기점이라고 한다.

분기점에서의 K값은 실수축상에서의 극대값이 되므로 특성방정식을 $K = f(s)$ 식으로 변형한 다음 $dK/ds = 0$ 의 근이 분기점이 된다.

$$1 + \frac{K}{s(s+2)} = 0 \Rightarrow \frac{K}{s(s+2)} = -1$$

$$K = \frac{b(s)}{a(s)}, \quad \frac{dK}{ds} = \frac{ab' - a'b}{a^2}$$

$$K = -s(s+2) \Rightarrow \frac{dK}{ds} = -(2s+2) = 0 \quad \therefore s = -1$$

7. The $j\omega$ -Axis Crossings: 허수축과의 교차점

근궤적이 허수축과 교차하는 순간은 시스템의 안정도가 파괴되는 임계점. 또한 Routh 안정도 판별법을 이용하여 위의 두 값을 구할 수도 있다.

$$1 + KG(j\omega) = \text{Re}(j\omega) + \text{Im}(j\omega) = 0$$



[예제 4.2] 개루프 전달함수 $G(s)$ 의 근궤적에서 허수축과의 교차점과 그 때의 시스템 파라미터 K 값은?

$$G(s) = \frac{K}{s(s+3)(s+5)}$$

이 시스템의 특성방정식은 다음과 같다.

$$s(s+3)(s+5) + K = 0 \quad \Rightarrow \quad s^3 + 8s^2 + 15s + K = 0$$

s 값에 $j\omega$ 를 대입하면,

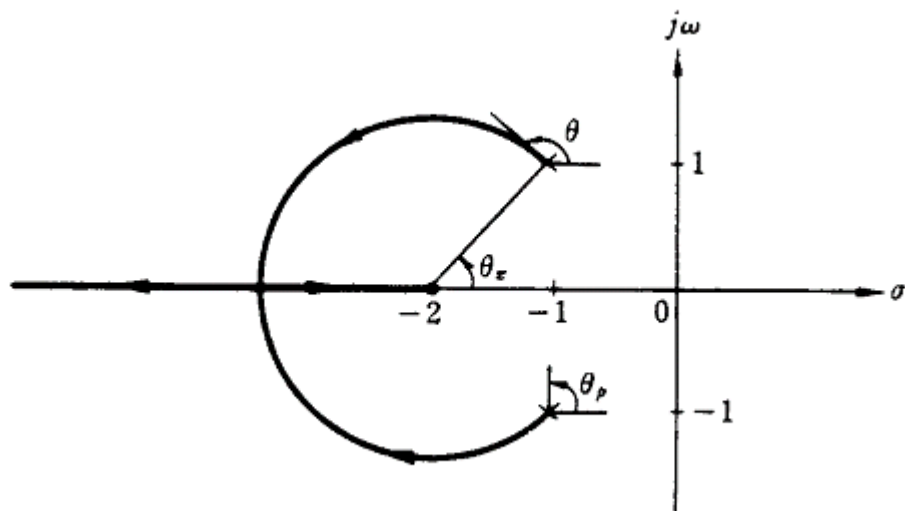
$$(j\omega)^3 + 8(j\omega)^2 + 15(j\omega) + K = -(8\omega^2 - K) + j\omega(15 - \omega^2) = 0$$

$$\therefore (8\omega^2 - K) = 0 \text{ 과 } \omega(15 - \omega^2) = 0 \text{ 이 성립되어야 함}$$

$$\therefore K = 8\omega^2 > 0, \quad \omega = \sqrt{15} \text{ 이므로}$$

$$\therefore K = 120$$

8. Angles of Departure and Arrival: 출발점과 종착점의 각도



$$G(s) = \frac{K(s+2)}{s^2 + 2s + 2}$$

극점-영점 배치 및 근궤적

점 s 가 근궤적상의 점이 되기 위해서는 위상조건

$$\theta_z - \theta_p - \theta = (2k + 1)180^\circ, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

위의 근궤적선도에서, 극점 $(-1+j1)$ 에서 근궤적의 출발각 θ 는

$$\theta = 180^\circ - \theta_p + \theta_z = 180^\circ - 90^\circ + 45^\circ = 135^\circ$$



▶ 소스-싱크 상사 개념을 이용하여 작도한 근궤적선도

$$G(s) = \frac{K(s + z_1)}{(s + p_1)(s + p_2)(s + p_3)}$$

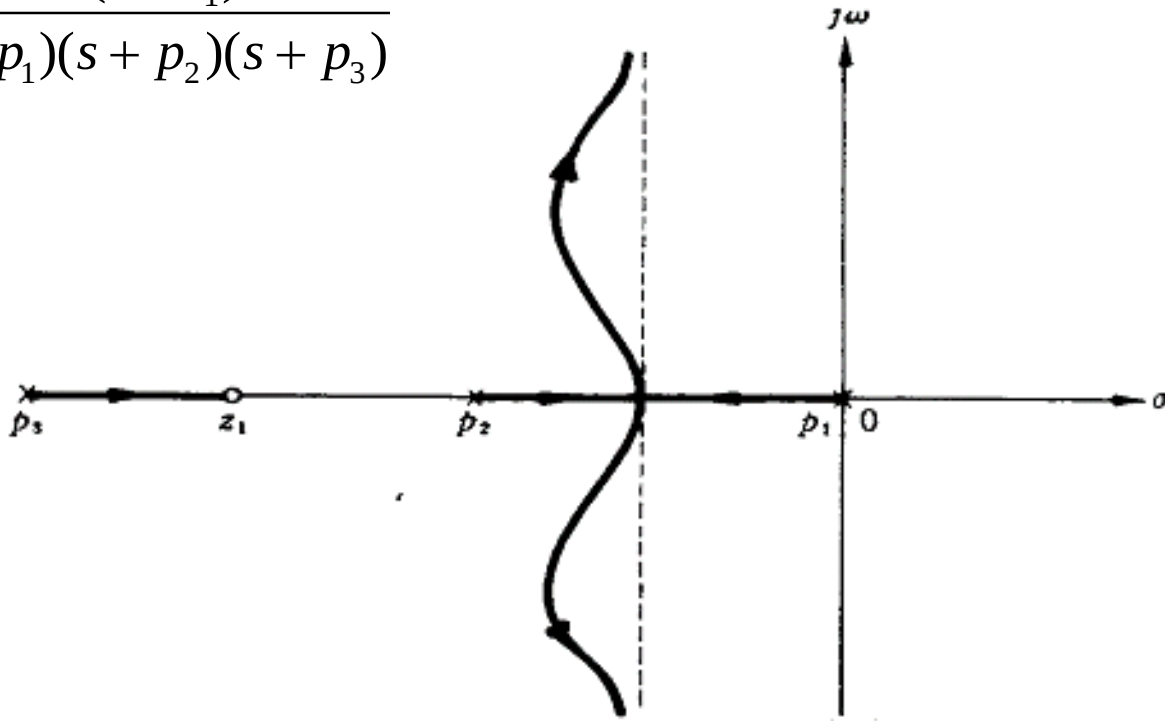


그림 4.7 소스-싱크 상사개념을 이용하여 작도한 근궤적선도의 예



4.4 근궤적 작도 예

[예제 4.3] 개루프 전달함수 $G(s) = \frac{K(s+1)}{s^2(s+2)}$ 인 시스템의 근궤적은?

1. 폐루프 특성방정식의 근궤적을 위한 일반형태는

$$1 + K \frac{s+1}{s^2(s+2)} = 0$$

2. s-평면상에 개루프 극점과 영점을 배치한다.

3. 실수축상의 근궤적을 그린다.

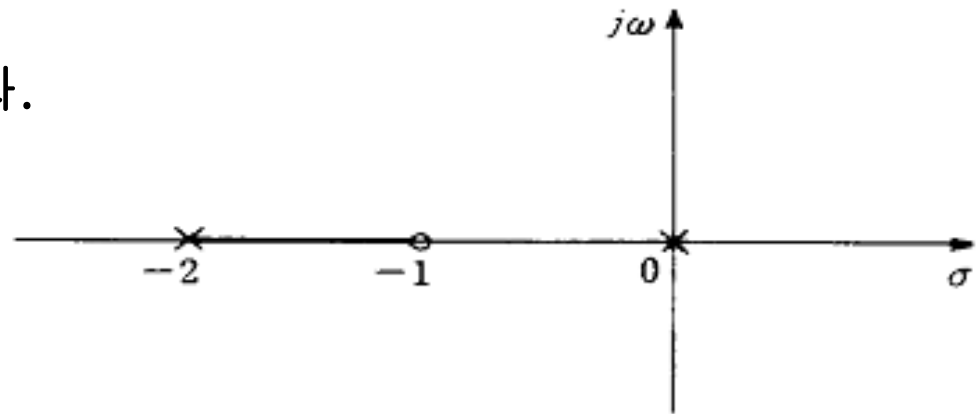


그림 4.8 $G(s) = \frac{K(s+1)}{s^2(s+2)}$ 의 극점-영점배치



4. 각도 α 이고 중심점 A_c 인 점근선

$$\alpha = \frac{(2k+1)180^\circ}{n-m}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$\therefore \alpha = \pm 90^\circ$$

$$\therefore A_c = \frac{\sum_{i=1}^n p_i - \sum_{j=1}^m z_j}{n-m} = \frac{-2 - (-1)}{3-1} = -0.5$$

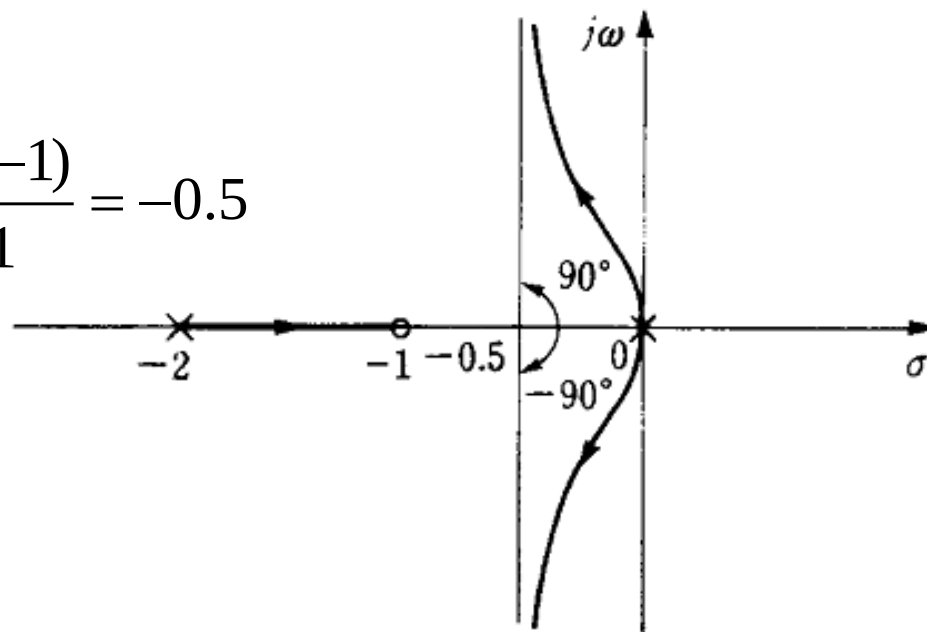


그림 4.10 $G(s) = \frac{K(s+1)}{s^2(s+2)}$ 의 근궤적선도



[예제 4.4] $G(s) = \frac{K}{s(s+1)(s+2)}$ 인 시스템의 근궤적?

1. 페루프 특성방정식을 근궤적을 위한 일반형태

$$1 + K \frac{1}{s(s+1)(s+2)} = 0$$

2. s-평면상에 개루프 극점 및 영점, 실수축 상의 근 궤적

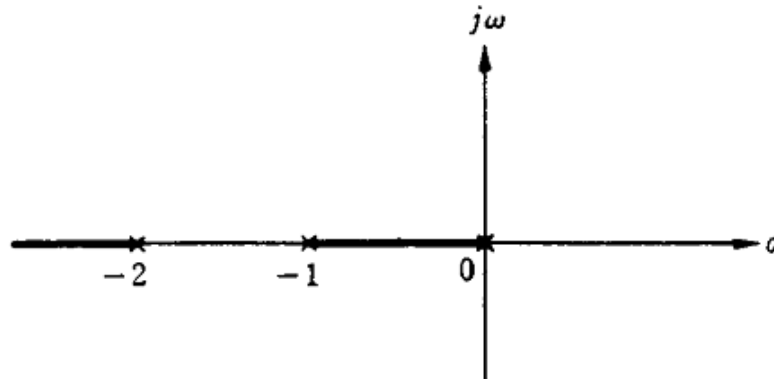


그림 4.11 $G(s) = \frac{K}{s(s+1)(s+2)}$ 의 실수축상의 근궤적



3. 각도 a 이고 중심점 A_c 인 점근선

$$a = \frac{(2k + 1)180^\circ}{n - m}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

혹은, $a = \pm 60^\circ, 180^\circ$

$$A_c = \frac{\sum_{i=1}^n p_i - \sum_{j=1}^m z_j}{n - m} = \frac{-3}{3} = -1$$

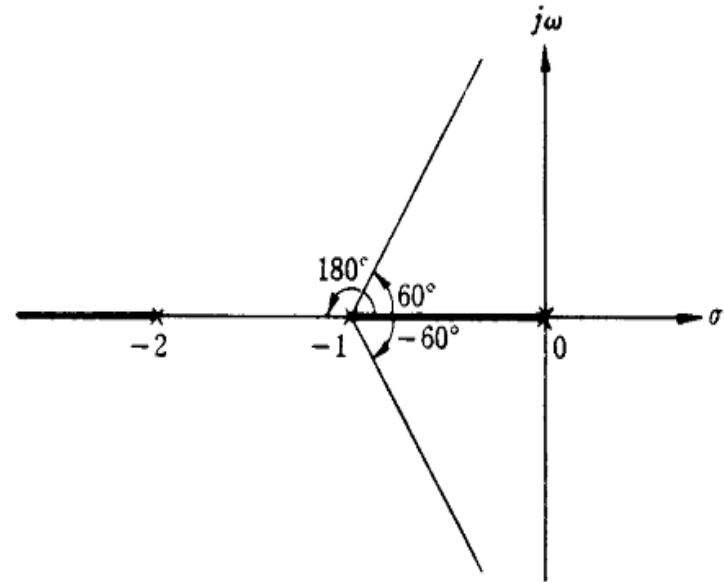


그림 4.12 $G(s) = \frac{K}{s(s+1)(s+2)}$ 의 점근선 표시



4. 분기점의 위치

$K = -s(s+1)(s+2)$ 를 이용해서 $-1 < s < 0$ 영역에서 K 값이 최대가 되는 s 값을 찾는다.

즉, $\frac{dK}{ds} = 0$ 으로부터 근궤적의 이탈점 $s = -0.423$

5. 허수축과의 교차점을 구한다.

$$1 + K \frac{1}{j\omega(j\omega+1)(j\omega+2)} = 0$$

$$\text{혹은, } (K - 3\omega^2) + j(2\omega - \omega^3) = 0$$

위 식을 만족하는 주파수 ω 와 시스템 파라미터 K 는

$$\omega = \sqrt{2}, \quad K = 6$$



위에 설명된 근궤적 작도법을 종합하면

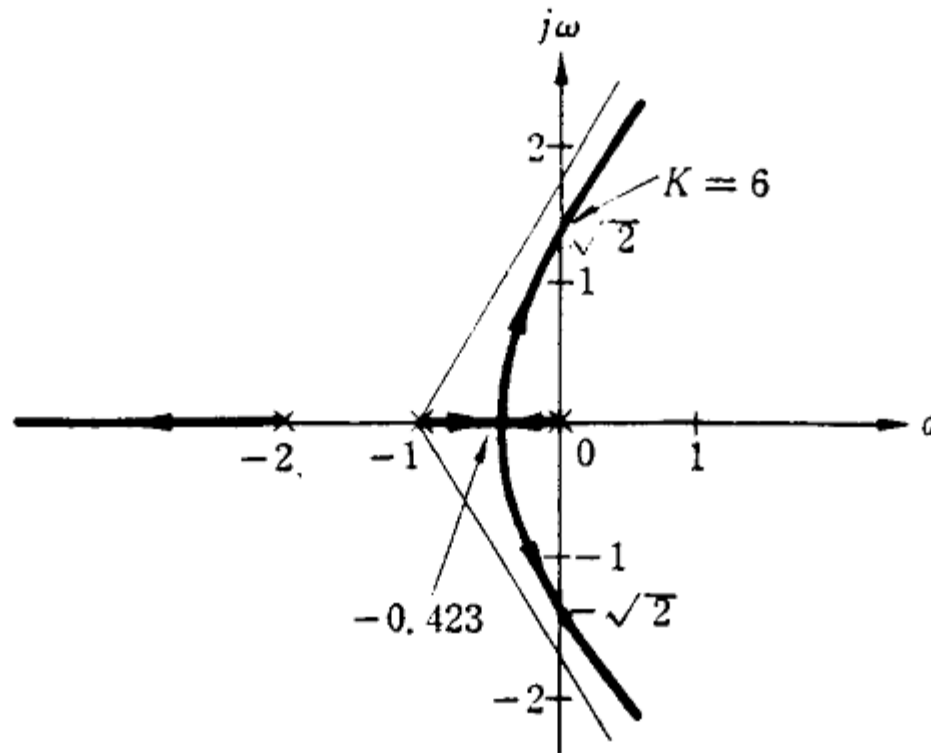


그림 4.13 $G(s) = \frac{K}{s(s+1)(s+2)}$ 의 근궤적선도



[예제 4.5] 개루프 전달함수 $G(s) = \frac{K}{s(s+4)(s^2+8s+32)}$ 의 근궤적?

1. 폐루프 특성방정식을 근궤적을 위한 일반형태로 표시한다.

$$1 + K \frac{1}{s(s+4)(s+4+j4)(s+4-j4)} = 0$$

2. s-평면상에 개루프 극점

3. 실수축상의 근궤적은 $s = 0$ 과 $s = -4$ 사이에 존재한다.

4. 점근선의 각도 α 는, 점근선의 중심점 A_c

$$\alpha = \frac{(2k+1)180^\circ}{n-m}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \text{ 혹은 } \alpha = \pm 45^\circ, \pm 135^\circ$$

$$A_c = -12/4 = -3$$



5. 분기점의 위치: $K = -s(s+4)(s+4+j4)(s+4-j4)$

$\frac{dK}{ds} = 0$ 으로부터 근궤적의 이탈점이 $s = -1.58$ 에 있음

6. 허수축과의 교차점: Routh 배열 이용

$$s(s+4)(s^2+8s+32)+K=s^4+12s^3+64s^2+128s+K=0$$

Routh 배열: $s^4 \mid 1 \quad 64 \quad K$

$s^3 \mid 12 \quad 128$

여기서, $b_1 = \frac{12 \times 64 - 128}{12} = 53.33$

$s^2 \mid b_1 \quad K$

$$c_1 = \frac{53.33 \times 128 - 12K}{53.33}$$

$s^1 \mid c_1$

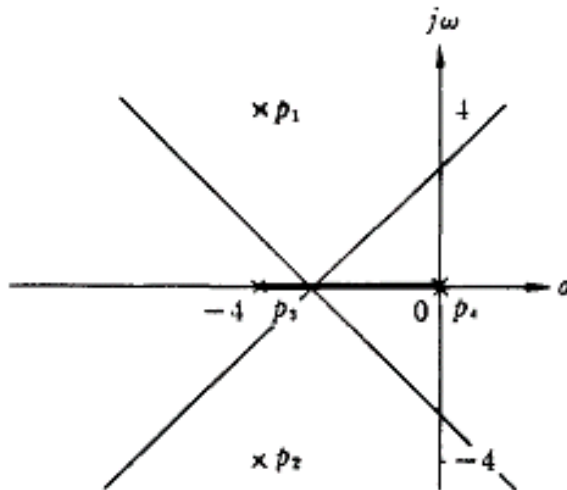
$s^0 \mid K$

$c_1 = 0$ 을 만족하는 K 값: $K = 569$

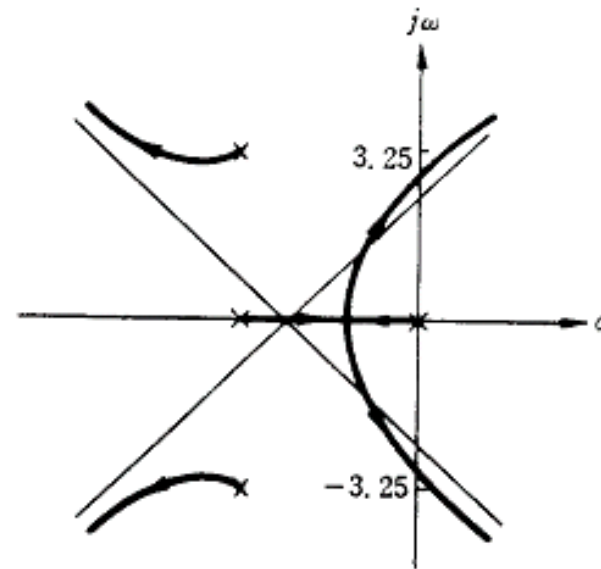
$b_1 s^2 + K = 0 \rightarrow$ 근궤적이 허수축상에 있을 때 $\omega = 3.25$

7. 복소극점 p_1 에서의 출발각 θ_1 ?

$$\theta_1 + 90^\circ + 90^\circ + 135^\circ = 180^\circ \quad \text{혹은} \quad \theta_1 = -135^\circ$$



(a)



(b)

$$G(s) = \frac{K}{s(s+4)(s^2+8s+32)} \text{의 근궤적선도}$$



Ex. 8.7 Sketch the root locus

Sol)

1. Poles: $-2, -4$ Zeros: $2 \pm j4$
2. Asymptotes: 없음($\because n = m$)
3. Break-away Point

$$1 + \frac{K(s^2 - 4s + 20)}{(s+2)(s+4)} = 0 \Rightarrow K = -\frac{(s+2)(s+4)}{s^2 - 4s + 20} = -\frac{(s^2 + 6s + 8)}{s^2 - 4s + 20}$$

$$\Rightarrow \frac{dK}{ds} = -\frac{(s^2 - 4s + 20)(2s + 6) - (2s - 4)(s^2 + 6s + 8)}{(s^2 - 4s + 20)^2} = 0$$

$$\therefore s = -2.88$$

4. The $j\omega$ -Axis Crossings

$$1 + \frac{K((j\omega)^2 - 4j\omega + 20)}{(j\omega)^2 + 6j\omega + 8} = 0$$

$$-(K+1)\omega^2 + 20K + 8 + j\omega(6-4K) = 0$$

$$\therefore K = 1.5, \quad \omega = \pm j3.9$$

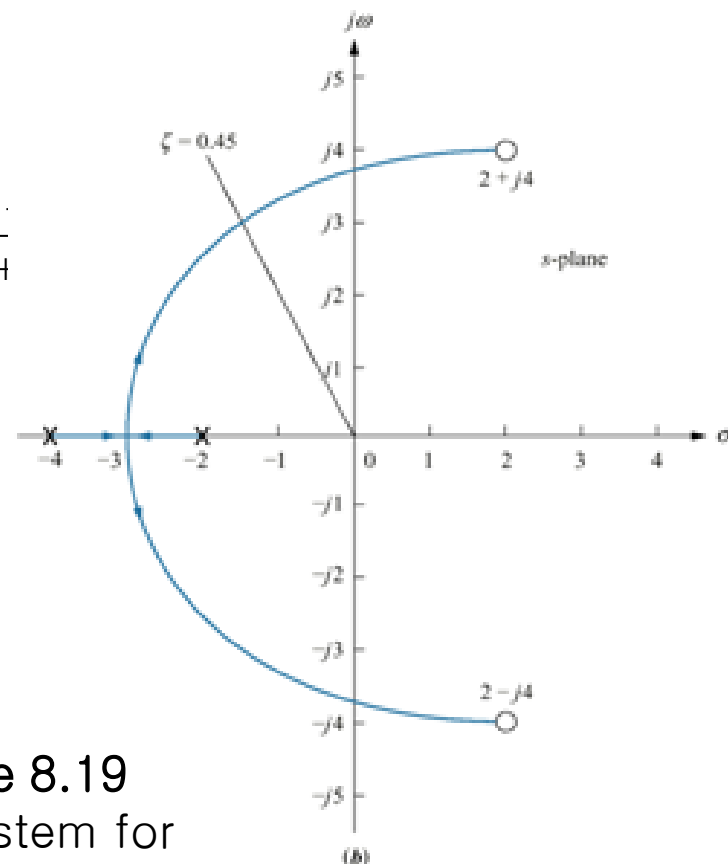
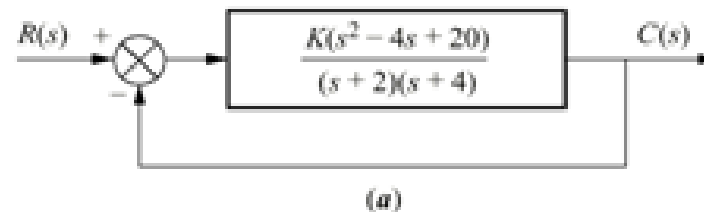


Figure 8.19

a. System for
Example 8.7;

b. root locus sketch