

*Vorlesung*

# **Partielle Differentialgleichungen I**

*gelesen von*

**Michael Herrmann**

*im Wintersemester 2011-12 an der Universität des Saarlandes*

*aufbauend auf einem Skript von*

**Mark Groves**

**26. Januar 2012**



# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einführung</b>	<b>5</b>
1.1	Lineare Differentialgleichungen erster Ordnung und die Methode der Charakteristiken . . . . .	6
1.2	Über lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten . . . . .	12
1.3	Lösungen durch Trennung der Veränderlichen . . . . .	15
1.4	Über Saiten und Membrane . . . . .	24
<b>2</b>	<b>Die Wellengleichung</b>	<b>33</b>
2.1	Wellengleichung im eindimensionalen Raum . . . . .	33
2.2	Wellengleichung im dreidimensionalen Raum . . . . .	39
2.3	Wellengleichung im zweidimensionalen Raum . . . . .	44
<b>3</b>	<b>Die Wärmeleitgleichung</b>	<b>49</b>
3.1	Das Maximumsprinzip . . . . .	49
3.2	Das Anfangswertproblem im $\mathbb{R}^n$ . . . . .	53
<b>4</b>	<b>Die Laplace- und die Poisson-Gleichung</b>	<b>61</b>
4.1	Distributionen . . . . .	61
4.2	Fundamentallösungen . . . . .	72
4.3	Greensche Funktionen . . . . .	77
4.4	Harmonische Funktionen . . . . .	81
4.4.1	Die Poissonsche Formel auf der Kreisscheibe . . . . .	81
4.4.2	Das schwache Maximum-Prinzip . . . . .	84
4.4.3	Die Mittelwert-Eigenschaft harmonischer Fkt. . . . .	87
4.4.4	Das starke Maximum-Prinzip . . . . .	90
4.4.5	Konvergenzsätze für Folgen harmonischer Funktionen . . . . .	93
4.5	Die Perronsche Methode . . . . .	97
4.5.1	Harmonische Liftung . . . . .	98
4.5.2	Die Perronsche Methode . . . . .	100



# Kapitel 1

## Einführung

### Definition

1. Eine **partielle Differentialgleichung** der **Ordnung**  $m$  mit  $n \geq 2$  **unabhängigen Veränderlichen**  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$  und einer **abhängigen Veränderlichen**  $u = u(\mathbf{x})$  ist eine Gleichung der Form

$$\begin{aligned} F(u(\mathbf{x}), \partial_{x_1} u(\mathbf{x}), \dots, \partial_{x_n} u(\mathbf{x}), \\ \partial_{x_1}^2 u(\mathbf{x}), \partial_{x_1} \partial_{x_2} u(\mathbf{x}), \dots, \partial_{x_n}^2 u(\mathbf{x}), \\ \dots, \\ \partial_{x_1}^m u(\mathbf{x}), \dots, \partial_{x_n}^m u(\mathbf{x}), \mathbf{x}) = 0, \end{aligned} \quad (1)$$

wobei  $F$  eine gegebene Funktion ist.

2. Eine **Lösung** der partielle Differentialgleichung (1) in einem Gebiet  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  (d. h. in einer offenen, nichtleeren, zusammenhängenden Teilmenge von  $\mathbb{R}^n$ ) ist eine Funktion  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  mit der Eigenschaft, dass  $u$  die Gleichung für jedes  $\mathbf{x} \in \Omega$  erfüllt.

### Lineare Gleichungen

Die partielle Differentialgleichung (1) heißt **linear** in einem Gebiet  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ , falls  $\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2$  Lösung der Gleichung

$$F(\dots, \mathbf{0}) = 0$$

für alle  $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$  und alle Lösungen  $u_1, u_2$  der Gleichung in  $\Omega$  ist.

Die partielle Differentialgleichung (1) heißt **linear homogen**, falls sie homogen ist und

$$F(\dots, \mathbf{0}) = 0.$$

### Beispiele

1. Die Laplace-Gleichung

$$u_{x_1 x_1} + u_{x_2 x_2} + \dots + u_{x_n x_n} = 0 \quad (\text{linear homogen, zweite Ordnung})$$

2. Die Poisson-Gleichung

$$u_{x_1x_1} + u_{x_2x_2} + \dots + u_{x_nx_n} = f(x), \quad (\text{linear, zweite Ordnung})$$

wobei  $f$  eine gegebene Funktion ist

3. Die Klein-Gordon-Gleichung

$$u_{x_1x_1} - u_{x_2x_2} - \dots - u_{x_nx_n} + u - u^3 \quad (\text{nichtlinear, zweite Ordnung})$$

4. Die Erhaltungsgleichung

$$u_{x_1} - uu_{x_2} = 0 \quad (\text{nichtlinear, erste Ordnung})$$

5. Die Eikonalgleichung

$$u_{x_1}^2 + u_{x_2}^2 = c^2, \quad (\text{nichtlinear, erste Ordnung})$$

wobei  $c \neq 0$  eine beliebige Konstante ist

In dieser Vorlesung werden überwiegend lineare partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung behandelt.

## 1.1 Lineare Differentialgleichungen erster Ordnung und die Methode der Charakteristiken

Die einfachste Gleichung dieser Art ist

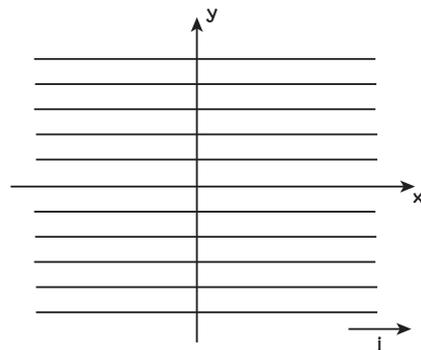
$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad \longleftarrow \text{“}u \text{ ist konstant in der } x\text{-Richtung”}$$

wobei  $u = u(x, y)$  ist. Die allgemeine Lösung ist

$$u = f(y),$$

wobei  $f$  eine beliebige Funktion einer Veränderlichen ist.

- $u$  ist konstant entlang der Geraden  $y = \text{Konstante}$ , die parallel zur  $i$ -Richtung laufen.
- $u$  hängt daher nur von  $y$  ab.



Dieselbe Methode funktioniert auch für kompliziertere Gleichungen.

### Beispiel

Finden Sie die allgemeine Lösung der Gleichung

$$au_x + bu_y = 0 \quad (2)$$

für  $u = u(x, y)$ , wobei  $a, b$  Konstante mit  $a^2 + b^2 \neq 0$  sind.

**Lösung**

(2) lässt sich umschreiben als

$$\underbrace{\frac{(a, b)}{\sqrt{a^2 + b^2}}}_{\mathbf{e}} \cdot \nabla u = 0$$

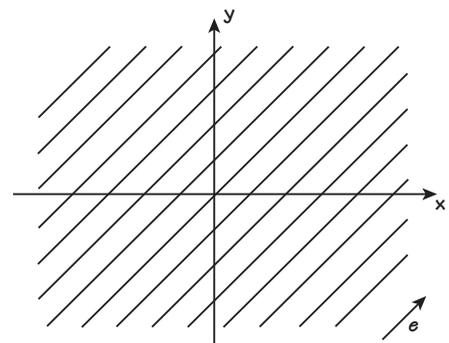
die Richtungsableitung  $\frac{\partial u}{\partial \mathbf{e}}$

von  $u$  in Richtung des

Einheitsvektors  $\mathbf{e} = \frac{(a, b)}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

(2) besagt also, dass  $u$  in der  $\mathbf{e}$ -Richtung konstant ist.

- $u$  ist konstant entlang der Geraden  $bx - ay = \text{Konstante}$ , die parallel zur  $\mathbf{e}$ -Richtung laufen.
- $u$  hängt daher nur von  $bx - ay$  ab.



Die allgemeine Lösung von (2) ist also

$$u = f(bx - ay),$$

wobei  $f$  eine beliebige Funktion einer Veränderlichen ist. □

**Definition**

Die Geraden

$$bx - ay = \text{Konstante}$$

heißen die **charakteristischen Linien** der Gleichung

$$au_x + bu_y = 0.$$

**Beispiel**

Finden Sie die allgemeine Lösung der Gleichung

$$u_x + yu_y = 0 \tag{3}$$

für  $u = u(x, y)$ .

**Lösung**

(3) besagt, dass die Richtungsableitung von  $u$  in Richtung des Einheitsvektors

$$\mathbf{e} = \frac{(1, y)}{\sqrt{1 + y^2}}$$

verschwindet.  $u$  ist also konstant entlang der **charakteristischen Kurven** mit Tangentenvektor  $\mathbf{e}$ .

Der Tangentenvektor zur Kurve  $\{y = y(x)\}$  ist nun

$$\frac{(1, y'(x))}{\sqrt{1 + (y'(x))^2}},$$

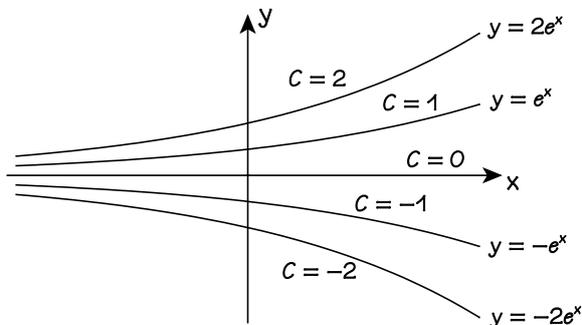
so dass die charakteristischen Kurven als Lösungen der trennbaren gewöhnlichen Differentialgleichung

$$\frac{dy}{dx} = y$$

gefunden werden können. Sie sind also

$$y = Ce^x,$$

wobei  $C$  eine Konstante ist.



Die charakteristischen Kurven stellen eine **Blätterung** des  $\mathbb{R}^2$  dar.

Es gilt:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} u(x, Ce^x) &= 0 \\ \Rightarrow u(x, Ce^x) &= u(0, C) \\ \Rightarrow u(x, y) &= u(0, e^{-x}y) \end{aligned}$$

Die allgemeine Lösung ist also

$$u(x, y) = f(e^{-x}y),$$

wobei  $f$  eine beliebige Funktion einer Veränderlichen ist.

### Bemerkung

#### Anfangswerte

Die allgemeinen Lösungen der Gleichungen

$$au_t + bu_x = 0$$

und

$$u_t + xu_x = 0$$

sind

$$u = f_1(bt - ax)$$

bzw.

$$u = f_2(e^{-t}x),$$

wobei  $f_1, f_2$  beliebige Funktionen einer Veränderlichen sind. Wenn wir den Wert von  $u$  als Funktion von  $x$  zu einem bestimmten 'Zeitpunkt'  $t = t_0$  vorschreiben, können wir  $u$  eindeutig bestimmen.

### Beispiel

Lösen Sie die **Anfangswertprobleme**

$$1. \quad au_t + bu_x = 0, \quad u(0, x) = \sin x;$$

$$2. \quad u_t + xu_x = 0, \quad u(0, x) = x^3.$$

### Lösung

1. Die allgemeine Lösung der Gleichung ist

$$u(t, x) = f_1(bt - ax)$$

und aus

$$u(0, x) = \sin x$$

folgt

$$\begin{aligned} f_1(-ax) &= \sin x \\ \Rightarrow f_1(x) &= \sin\left(\frac{-x}{a}\right). \end{aligned}$$

Die Lösung des Anfangswertproblems ist also

$$u(t, x) = \sin\left(x - \frac{b}{a}t\right).$$

2. Die allgemeine Lösung der Gleichung ist

$$u(t, x) = f_2(e^{-t}x)$$

und aus

$$u(0, x) = x^3$$

folgt

$$f_2(x) = x^3.$$

Die Lösung des Anfangswertproblems ist also

$$u(t, x) = x^3 e^{-3t}.$$

□

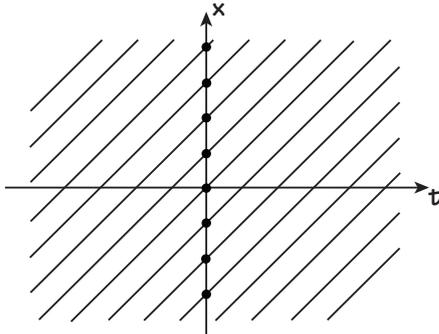
**Bemerkung**

Eine Lösung der Gleichung

$$au_t + bu_x = 0$$

ist konstant entlang der charakteristischen Kurven

$$bt - ax = c.$$

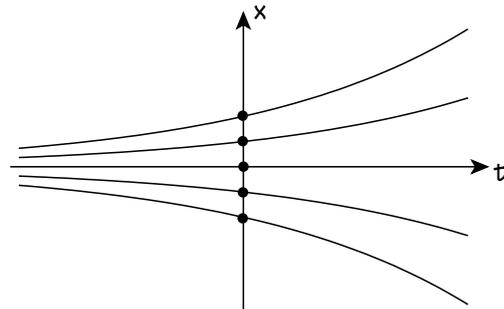


Eine Lösung der Gleichung

$$u_t + xu_x = 0$$

ist konstant entlang der charakteristischen Kurven

$$y = ce^t.$$



In beiden Fällen bilden die charakteristischen Kurven eine Blätterung der  $(t, x)$ -Ebene. Insbesondere schneidet jede charakteristische Kurve die  $x$ -Achse genau einmal. Durch die Angabe eines Anfangswertes legen wir also die konstanten Werte von  $u$  entlang der charakteristischen Kurven fest.

Falls nicht alle charakteristischen Kurven die  $x$ -Achse schneiden, können wir durch die Angabe eines Anfangswertes  $u$  nicht überall eindeutig bestimmen.

**Beispiel**

Finden Sie die charakteristischen Kurven der Gleichung

$$u_t - x^2 u_x = 0$$

und diskutieren Sie das entsprechende Anfangswertproblem.

**Lösung**

Die charakteristischen Kurven der Gleichung

$$u_t - x^2 u_x = 0$$

sind die Lösungen  $x = x(t)$  der gewöhnlichen Differentialgleichung

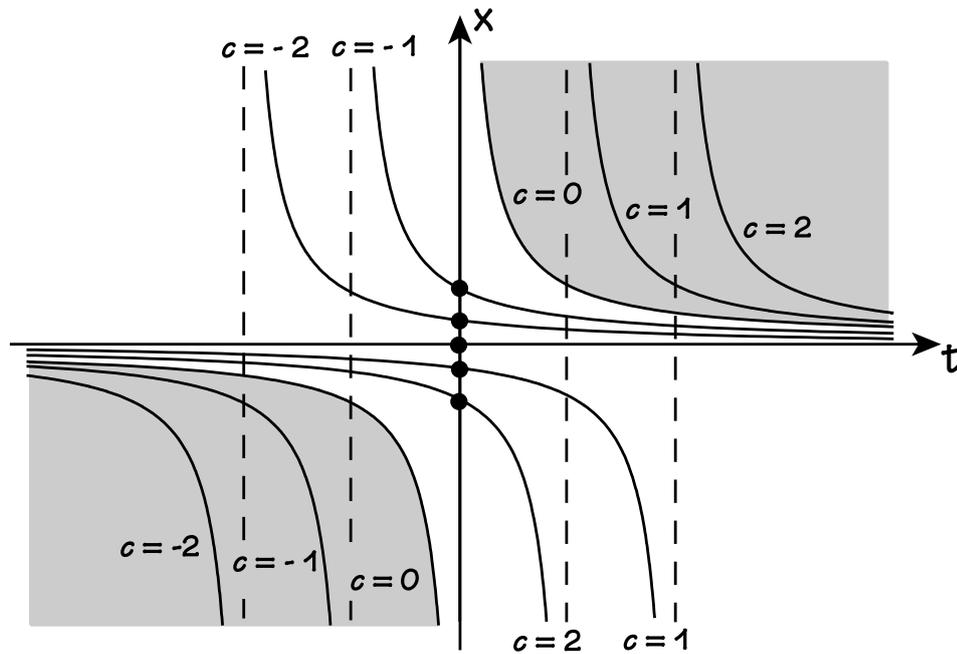
$$\frac{dx}{dt} = -x^2,$$

also

$$x = 0$$

und

$$x = \frac{1}{t - c}, \quad c \in \mathbb{R} :$$



Die charakteristischen Kurven in den markierten Regionen  $x \geq 1/t > 0$  und  $x \leq 1/t < 0$  schneiden die  $x$ -Achse nicht.

### Bemerkung

Betrachte die Gleichung

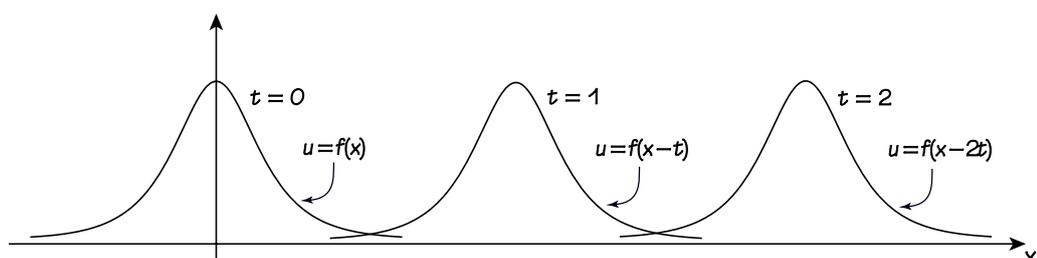
$$u_t + cu_x = 0$$

für  $u = u(x, t)$ , wobei  $c$  eine positive Konstante ist. Die allgemeine Lösung ist

$$u = f(x - ct),$$

wobei  $f$  eine beliebige Funktion einer Veränderlichen ist.

Wenn wir  $x$  als 'Raum' und  $t$  als 'Zeit' betrachten, besteht die Lösung aus einer Welle, die sich von links nach rechts mit Geschwindigkeit  $c$  und ohne Formänderung bewegt:



## 1.2 Über lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten

Die allgemeinste homogene Gleichung dieser Art in  $n$  unabhängigen Veränderlichen  $x_1, \dots, x_n$  ist

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij} u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^n a_i u_{x_i} + a_0 u = 0, \quad (1)$$

wobei  $a_{ij}$ ,  $a_i$  und  $a_0$  Konstante sind und die Matrix  $A = (a_{ij})_{n \times n}$  symmetrisch und nicht gleich Null ist.

### Lemma

Es existieren eine lineare Koordinatentransformation  $\mathbf{z} = \mathbf{z}(\mathbf{x})$  und nichtnegative ganze Zahlen  $m_1, m_2$  mit  $m_1 + m_2 \leq n$ , so dass (1) die Form

$$\sum_{k=1}^{m_1} u_{z_k z_k} - \sum_{k=m_1+1}^{m_1+m_2} u_{z_k z_k} + \sum_{k=1}^n c_k u_{z_k} + c_0 u = 0 \quad (2)$$

in den neuen Koordinaten hat.

### Beweis

Da  $A$  reell und symmetrisch ist, sind ihre Eigenwerte alle reell. Ferner existiert eine orthogonale Matrix  $Q$  mit der Eigenschaft, dass

$$B := Q A Q^T = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_{m_1}, \lambda_{m_1+1}, \dots, \lambda_{m_1+m_2}, \underbrace{0, \dots, 0}_{n - (m_1 + m_2)\text{-mal}}),$$

wobei  $m_1$  und  $m_2$  die Anzahl der positiven bzw. negativen Eigenwerte (nach geometrischer Vielfachheit gezählt) sind.

Betrachte die Koordinatentransformation  $\mathbf{y} = Q\mathbf{x}$ , d.h.

$$y_k = \sum_{m=1}^n q_{km} x_m, \quad k = 1, \dots, n.$$

Aus der Kettenregel folgt

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_i} &= \sum_{k=1}^n \frac{\partial y_k}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial y_k} \\ &= \sum_{k=1}^n q_{ki} \frac{\partial}{\partial y_k}, \end{aligned}$$

so dass

$$\begin{aligned} u_{x_i} &= \sum_{k=1}^n q_{ki} u_{y_k}, \\ u_{x_i x_j} &= \left( \sum_{k=1}^n q_{ki} \frac{\partial}{\partial y_k} \right) \left( \sum_{\ell=1}^n q_{\ell j} \frac{\partial}{\partial y_\ell} \right) u \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\sum_{i,j=1}^n a_{ij}u_{x_i x_j} &= \sum_{k,\ell=1}^n \underbrace{\left( \sum_{i,j=1}^n q_{ki}a_{ij}q_{\ell j} \right)}_{= b_{k\ell}} u_{y_k y_\ell}, \\ \sum_{i=1}^n a_i u_{x_i} &= \sum_{k=1}^n \underbrace{\left( \sum_{i=1}^n q_{ki}a_i \right)}_{:= b_k} u_{y_k}.\end{aligned}$$

Unsere Gleichung ist somit

$$\sum_{k=1}^{m_1} \lambda_k u_{y_k y_k} + \sum_{k=m_1+1}^{m_1+m_2} \lambda_k u_{y_k y_k} + \sum_{k=1}^n b_k u_{y_k} + a_0 u = 0. \quad (3)$$

Schließlich definieren wir

$$z_k = \frac{1}{\sqrt{|\lambda_k|}} y_k, \quad k = 1, \dots, m_1 + m_2$$

und

$$z_k = y_k, \quad k = m_1 + m_2 + 1, \dots, n.$$

Damit wird Gleichung (3) in Gleichung (2) transformiert, wobei  $c_k = b_k / \sqrt{|\lambda_k|}$ ,  $k = 1, \dots, n$  und  $c_0 = a_0$ .  $\square$

### Definition

Die Gleichung (1) heißt

- **elliptisch**, falls  $m_1 = n$  oder  $m_2 = n$  ist (alle Eigenwerte von  $A$  haben dasselbe Vorzeichen);
- **parabolisch**, falls  $m_1 + m_2 < n$  ist (mindestens ein Eigenwert von  $A$  verschwindet);
- **hyperbolisch**, falls  $m_1 + m_2 = n$  und  $m_1 = 1$  oder  $m_2 = 1$  (kein Eigenwert von  $A$  verschwindet, und bis auf einen haben alle Eigenwerte dasselbe Vorzeichen).

### Beispiele

#### 1. Die Laplace-Gleichung

$$u_{x_1 x_1} + \dots + u_{x_n x_n} = 0$$

für  $u = u(\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$  ist elliptisch.

#### 2. Die Wärmeleitungsgleichung

$$u_t = u_{x_1 x_1} + \dots + u_{x_n x_n}$$

für  $u = u(t, \mathbf{x})$ ,  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$  ist parabolisch.

3. Die **Wellengleichung**

$$u_{tt} = c^2(u_{x_1x_1} + \dots + u_{x_nx_n})$$

für  $u = u(t, \mathbf{x})$ ,  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ , wobei  $c$  eine positive Konstante ist, ist hyperbolisch.

Die Gleichungen

$$\Delta u = 0$$

$$u_t = \Delta u$$

$$u_{tt} = \Delta u$$

(Laplace-Gleichung)

(Wärmeleitungsgleichung)

(Wellengleichung)

sind die kanonischen Beispiele der drei Arten von Gleichungen und wir werden sie gründlich untersuchen. Hier schreiben wir

$$\Delta = \partial_{x_1}^2 + \dots + \partial_{x_n}^2.$$

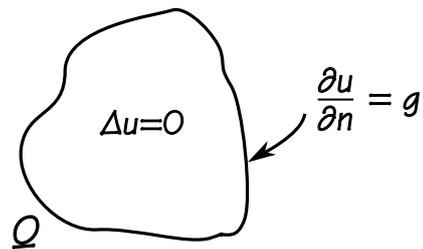
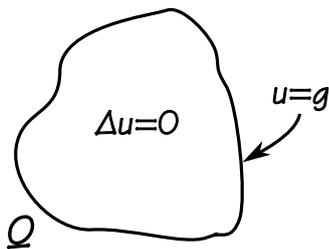
↑

der **Laplace-Operator**

Wir untersuchen unsere Gleichungen für Werte von  $\mathbf{x}$  in einem Gebiet  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ . Dabei gilt die partielle Differentialgleichung nur **im Inneren** von  $\Omega$ ; wir müssen zusätzlich vorschreiben, wie sich  $u$  auf dem Rande  $\partial\Omega$  von  $\Omega$  verhält. Dies tun wir, indem wir entweder den Wert von  $u$  (**Dirichlet Randwerte**) oder den Wert der normalen Ableitung  $\frac{\partial u}{\partial n}$  (**Neumannsche Randwerte**) auf  $\partial\Omega$  vorschreiben.

Im Falle der Laplace-Gleichung führt diese Prozedur zu zwei **Randwertproblemen**:

- Das **Dirichletsche Randwertproblem**
- Das **Neumannsche Randwertproblem**



Die Wellen- und Wärmeleitungsgleichungen haben eine gesonderte unabhängige Veränderliche  $t$ , die wir üblicherweise als ‘Zeit’ betrachten. Wir schreiben die Lösung als

$$u(t, \mathbf{x}),$$

↗ ↖  
‘Zeit’    ‘Raum’

wobei die partielle Differentialgleichung die **Evolution** in Zeit von  $u$  im räumlichen Gebiet  $\Omega$  beschreibt. Wir schreiben Dirichletsche oder Neumannsche Randwerte auf  $\partial\Omega$  sowie **Anfangswerte** bei  $t = 0$  vor:

**Wärmeleitungsgleichung**

$$\left. \begin{aligned} u_t &= \Delta u, & \mathbf{x} \in \Omega, t > 0, \\ u &= g, \\ \frac{\partial u}{\partial n} &= g, \end{aligned} \right\} \mathbf{x} \in \partial\Omega, t > 0,$$

$$u = f, \quad \mathbf{x} \in \Omega, t = 0$$

**Wellengleichung**

$$\left. \begin{aligned} u_{tt} &= \Delta u, & \mathbf{x} \in \Omega, t > 0, \\ u &= g, \\ \frac{\partial u}{\partial n} &= g, \end{aligned} \right\} \mathbf{x} \in \partial\Omega, t > 0,$$

$$u = f_1, \quad \mathbf{x} \in \Omega, t = 0,$$

$$u_t = f_2, \quad \mathbf{x} \in \Omega, t = 0$$

Dies sind **Anfangsrandwertprobleme**.

Wir werden uns mit folgenden Themen beschäftigen:

- **Existenz:** Haben die obigen Probleme Lösungen? Welche Methode gibt es, um die Lösungen zu finden?
- **Eindeutigkeit:** Gibt es nur eine Lösung?
- Die **qualitativen Eigenschaften** der Lösungen.

## 1.3 Lösungen durch Trennung der Veränderlichen

### Beispiel

Lösen Sie das Anfangsrandwertproblem

$$u_t = u_{xx} \quad x \in (0, a), t > 0, \quad (1)$$

$$u(t, 0) = 0 \quad t > 0, \quad (2)$$

$$u(t, a) = 0 \quad t > 0, \quad (3)$$

$$u(0, x) = f(x) \quad x \in (0, a) \quad (4)$$

### Lösung

Wir suchen eine Lösung der Form

$$u(t, x) = f_1(t)f_2(x). \quad \text{‘Separationsansatz’}$$

Die Differentialgleichung (1) liefert

$$f_1'(t)f_2(x) = f_1(t)f_2''(x)$$

und damit

$$\frac{f_1'(t)}{f_1(t)} = \frac{f_2''(x)}{f_2(x)}.$$

Die linke Seite dieser Gleichung hängt nur von  $t$  ab, während die rechte Seite nur von  $x$  abhängt. Beide Seiten sind also konstant, d.h. es gilt

$$\frac{f_1'(t)}{f_1(t)} = k, \quad \frac{f_2''(x)}{f_2(x)} = k$$

für eine Konstante  $k$ . Die Funktion  $f_2$  genügt also den Gleichungen

$$\begin{aligned} f_2''(x) - kf_2(x) &= 0, & x \in (0, a), \\ f_2(0) &= 0, \\ f_2(a) &= 0. \end{aligned}$$

Wir unterscheiden die folgenden drei Fälle:

Fall  $k = 0$ : Es gilt

$$f_2(x) = Ax + B,$$

und

$$\left. \begin{aligned} f_2(0) = 0 &\Rightarrow B = 0 \\ f_2(a) = 0 &\Rightarrow Aa + B = 0 \end{aligned} \right\} A = B = 0.$$

In diesem Fall gilt also  $f_2(x) = 0$ .

Fall  $k = \kappa^2 > 0$ : Wir haben

$$f_2(x) = Ae^{\kappa x} + Be^{-\kappa x}$$

und

$$\left. \begin{aligned} f_2(0) = 0 &\Rightarrow A + B = 0 \\ f_2(a) = 0 &\Rightarrow Ae^{\kappa a} + Be^{-\kappa a} = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow A = B = 0,$$

so dass  $f_2(x) = 0$  ist.

Fall  $k = -\kappa^2 > 0$ : Es gilt

$$f_2(x) = A \cos \kappa x + B \sin \kappa x$$

und

$$\begin{aligned} f_2(0) = 0 &\Rightarrow A = 0 \\ f_2(a) = 0 &\Rightarrow B \sin \kappa a = 0 \end{aligned}$$

Wir erhalten eine nichttriviale Lösung für  $f_2$  durch die Wahl

$$\kappa = \frac{n\pi}{a}, \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

so dass

$$f_2(x) = B_n \sin \left( \frac{n\pi x}{a} \right), \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

ist. Die entsprechende Gleichung für  $f_1$  ist

$$\begin{aligned} f_1'(t) &= -\frac{n^2\pi^2}{a^2} f_1(t) \\ \Rightarrow f_1(t) &= C_n \exp \left( -\frac{n^2\pi^2 t}{a^2} \right), \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Die trennbaren Lösungen von (1)-(3) sind also

$$u_n(t, x) = D_n \sin \left( \frac{n\pi x}{a} \right) \exp \left( -\frac{n^2\pi^2 t}{a^2} \right), \quad n = 1, 2, \dots$$

Es bleibt nun, die Anfangsbedingung (4) zu diskutieren. Da die Gleichung (1) linear ist, ist jede lineare Kombination der Lösungen  $u_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$  ebenfalls eine Lösung. Als allgemeine Lösung nehmen wir also die ‘unendliche Summe’

$$u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} D_n \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \exp\left(-\frac{n^2\pi^2 t}{a^2}\right).$$

Aus

$$u(0, x) = f(x)$$

folgt

$$f(x) = \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} D_n \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)}_{\text{Dies ist die Sinusreihendarstellung von } f}$$

Dies ist die  
Sinusreihendarstellung von  $f$

so dass

$$D_n = \frac{2}{a} \int_0^a f(x) \sin \frac{n\pi x}{a} dx. \quad \square$$

Dieselbe Methode funktioniert für Probleme in höheren Dimensionen.

### Beispiel

Lösen Sie das Randwertproblem

$$\Delta u = 0 \quad r < a, \quad (1)$$

$$u(a, \theta) = f(\theta) \quad \theta \in [0, 2\pi), \quad (2)$$

wobei  $(r, \theta)$  die üblichen ebenen Polarkoordinaten sind.

### Lösung

Wir benutzen die Formel

$$\Delta u = u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} = 0$$

für den Laplace-Operator in ebenen Polarkoordinaten, und suchen eine Lösung von (1)–(2) der Form

$$u(r, \theta) = f_1(r)f_2(\theta), \quad \text{‘Separationsansatz’}$$

so dass

$$\begin{aligned} f_2(\theta)f_1''(r) + \frac{1}{r}f_2(\theta)f_1'(r) + \frac{1}{r^2}f_2''(\theta)f_1(r) &= 0 \\ \Rightarrow r^2\frac{f_1''(r)}{f_1(r)} + r\frac{f_1'(r)}{f_1(r)} &= -\frac{f_2''(\theta)}{f_2(\theta)} \end{aligned}$$

Die linke Seite dieser Gleichung hängt nur von  $r$  ab, während die rechte Seite nur von  $t$  abhängt. Beide Seiten sind also konstant:

$$r^2 \frac{f_1''(r)}{f_1(r)} + \frac{r f_1'(r)}{f_1(r)} = k, \quad -\frac{f_2''(\theta)}{f_2(\theta)} = k.$$

Die Funktion  $f_2$  genügt damit den Gleichungen

$$\begin{aligned} f_2''(\theta) + k f_2(\theta) &= 0, \\ f_2(\theta + 2\pi) &= f_2(\theta). \end{aligned}$$

Fall  $k = 0$ : Es gilt

$$f_2(\theta) = A\theta + B$$

und

$$\begin{aligned} f_2(\theta + 2\pi) &= f_2(\theta) \\ \Rightarrow A &= 0, \end{aligned}$$

so dass  $f_2(\theta) = B$  ist.

Fall  $k = -\kappa^2 < 0$ : Es gilt

$$f_2(\theta) = C e^{\kappa\theta} + D e^{-\kappa\theta}$$

und

$$\begin{aligned} f_2(\theta + 2\pi) &= f_2(\theta) \\ \Rightarrow C = D &= 0, \end{aligned}$$

so dass  $f_2(x) = 0$  ist.

Fall  $k = \kappa^2 > 0$ : Es gilt

$$f_2(\theta) = E \sin(\kappa\theta) + F \cos(\kappa\theta)$$

und wir erhalten eine nichttriviale  $2\pi$ -periodische Lösung für

$$\kappa = n, \quad n = 1, 2, \dots,$$

so dass

$$f_2(\theta) = E_n \sin(n\theta) + F_n \cos(n\theta), \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Die entsprechende Gleichung für  $f_1$  ist die **Euler-Gleichung**

$$r^2 f_1''(r) + r f_1'(r) - n^2 f_1(r) = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

( $n = 0$  entspricht dem Fall  $k = 0$  und  $f_2(\theta) = B$ .) Die allgemeine Lösung dieser Gleichung ist

$$f_1(r) = \begin{cases} A_0 + B_0 \log r, & n = 0, \\ A_n r^n + B_n r^{-n}, & n = 1, 2, 3, \dots \end{cases}$$

Unsere Lösungen müssen zweimal differenzierbar für  $r < a$  und insbesondere stetig im Nullpunkt sein. Wir setzen daher  $B_0 = 0$  und  $B_n = 0$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$

Die trennbaren Lösungen von (1) sind also

$$\begin{aligned} u_0(r, \theta) &= C_0, \\ u_n(r, \theta) &= r^n (C_n \sin(n\theta) + D_n \cos(n\theta)), \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Um die Randbedingung (2) zu erfüllen, benutzen wir die unendliche Summe

$$u(r, \theta) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n (C_n \sin(n\theta) + D_n \cos(n\theta))$$

als allgemeine Lösung von (1). Aus (2) folgt

$$\underbrace{C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (C_n a^n \sin(n\theta) + D_n a^n \cos(n\theta))}_{\text{Fourierreihendarstellung von } f} = f(\theta),$$

so dass

$$\begin{aligned} C_0 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) \, d\theta \\ C_n a^n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) \sin(n\theta) \, d\theta, \quad n = 1, 2, \dots, \\ D_n a^n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) \cos(n\theta) \, d\theta, \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

□

Manchmal entstehen Gleichungen mit durch spezielle Funktionen definierten Lösungen.

### Beispiel

Finden Sie alle trennbaren Lösungen der  $(2 + 1)$ -dimensionalen Wellengleichung

$$u_{tt} = \Delta u, \quad r < a, \quad t > 0 \tag{1}$$

mit Randbedingung

$$u = 0, \quad r = a, \quad t > 0, \tag{2}$$

wobei  $(r, \theta)$  die üblichen ebenen Polarkoordinaten sind.

### Lösung

Wir suchen eine Lösung von (1), (2) der Form

$$u(x_1, x_2, t) = F(x_1, x_2) f_3(t), \quad \text{‘Separationsansatz’}$$

so dass

$$\frac{\Delta F(x_1, x_2)}{F(x_1, x_2)} = \frac{f_3''(t)}{f_3(t)} = k_1$$

ist. Die Funktion  $F$  genügt also den Gleichungen

$$\Delta F = k_1 F, \quad |x| < a, \quad (3)$$

$$F = 0, \quad |x| = a. \quad (4)$$

Diese Gleichungen sind das *Eigenwertproblem* des Laplace-Operators mit Dirichlet-Randbedingungen auf der Kreisscheibe mit Radius  $a$ .

Um dieses Eigenwertproblem zu lösen, unterscheiden wir wieder verschiedene Fälle.

Fall  $k_1 = 0$ : Aus dem ersten Greenschen Integralsatz folgt

$$\begin{aligned} & \int_{r < a} (F \Delta F + \nabla F \cdot \nabla F) = \int_{r=a} F \frac{\partial F}{\partial n} \\ \Rightarrow & \int_{r < a} |\nabla F|^2 = 0 \\ \Rightarrow & |\nabla F|^2 = 0 \\ \Rightarrow & F = \underbrace{\text{Konstante}}_{= 0} \\ & \text{weil } F = 0 \text{ für } r = a \end{aligned}$$

Fall  $k_1 = \kappa^2 > 0$ : Diesmal erhalten wir

$$\begin{aligned} & \int_{r < a} (\kappa^2 F^2 + |\nabla F|^2) = 0 \\ \Rightarrow & \int_{r < a} F^2 = 0 \\ \Rightarrow & F = 0 \end{aligned}$$

Fall  $k_1 = \kappa^2 < 0$ : Wir suchen eine Lösung von (3), (4) der Form

$$F(x_1, x_2) = f_1(r) f_2(\theta), \quad \text{‘Separationsansatz’}$$

so dass

$$\frac{r^2 f_1''(r)}{f_1(r)} + \frac{r f_1'(r)}{f_1(r)} + \kappa^2 r^2 = \frac{-f_2''(\theta)}{f_2(\theta)} = k_2$$

ist. Die Funktion  $f_2$  genügt also den Gleichungen

$$\begin{aligned} f_2''(\theta) + k_2 f_2(\theta) &= 0, \\ f_2(\theta + 2\pi) &= f_2(\theta). \end{aligned}$$

Wie im letzten Beispiel folgern wir, dass  $k_2 = n^2$ ,  $n = 0, 1, \dots$  ist und

$$f_2(\theta) = \begin{cases} A_0, & n = 0, \\ A_n \cos(n\theta) + B_n \sin(n\theta), & n = 1, 2, \dots \end{cases}$$

Die entsprechenden Gleichungen für  $f_1$  sind

$$r^2 f_1''(r) + r f_1' + (\kappa^2 r^2 - n^2) f_1 = 0, \quad (5)$$

$$f_1(a) = 0. \quad (6)$$

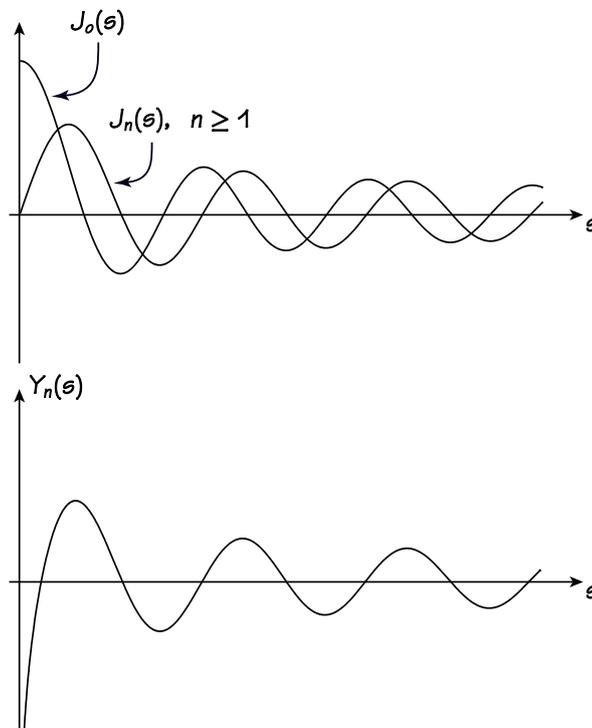
Durch die Substitution

$$s = \kappa r, \quad f(s) = f_1(r)$$

erhalten wir die **Besselsche Differentialgleichung**

$$s^2 f''(s) + s f'(s) + (s^2 - n^2) f = 0.$$

Diese Gleichung hat zwei linear unabhängige Lösungen, die **Besselsche Funktion erster Gattung**  $J_n(s)$  und die **Besselsche Funktion zweiter Gattung**  $Y_n(s)$ :



- $\lim_{s \rightarrow 0} J_n(s) = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & n \geq 1 \end{cases}$

- $J_n$  hat unendlich viele Nullstellen

- $\lim_{s \rightarrow \infty} J_n(s) = 0.$

- $\lim_{s \rightarrow 0} Y_n(s) = -\infty$

- $Y_n$  hat unendlich viele Nullstellen

- $\lim_{s \rightarrow \infty} Y_n(s) = 0$

Die allgemeine Lösung von (5) ist also

$$f_1(r) = C_n J_n(\kappa r) + D_n Y_n(\kappa r),$$

aber da die Lösung von (1) stetig im Nullpunkt sein soll, müssen wir  $D_n = 0$  setzen. Aus (6) folgt nun

$$C_n J_n(\kappa a) = 0$$

und wir erhalten eine nichttriviale Lösung für  $f_1$  durch die Wahl

$$\kappa = \frac{j_{mn}}{a},$$

wobei

$$0 < j_{1n} < j_{2n} < j_{3n} < \dots$$

die Nullstellen von  $J_n$  sind. Insgesamt gilt

$$f_1(r) = C_{mn} J_n \left( \frac{j_{mn} r}{a} \right), \quad m = 1, 2, \dots, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Die entsprechende Gleichung für  $f_3$  ist

$$\begin{aligned} f_3''(t) + \frac{j_{mn}^2}{a^2} f_3(t) &= 0 \\ \Rightarrow f_3(t) &= E_{mn} \sin \left( \frac{j_{mn} t}{a} \right) + F_{mn} \cos \left( \frac{j_{mn} t}{a} \right). \end{aligned}$$

Die trennbaren Lösungen von (1)–(2) sind also

$$\begin{aligned} u_{m0}(r, \theta, t) &= J_0 \left( \frac{j_{m0} r}{a} \right) \left( A_{m0} \sin \left( \frac{j_{m0} t}{a} \right) + B_{m0} \cos \left( \frac{j_{m0} t}{a} \right) \right), \quad m = 1, 2, \dots, \\ u_{mn}(r, \theta, t) &= J_n \left( \frac{j_{mn} r}{a} \right) \left( A_{mn} \sin \left( \frac{j_{mn} t}{a} \right) + B_{mn} \cos \left( \frac{j_{mn} t}{a} \right) \right) \\ &\quad \times (A_n \cos(n\theta) + B_n \sin(n\theta)), \quad m, n = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

□

### Beispiel

Finden Sie alle trennbaren Lösungen der dreidimensionalen Laplace-Gleichung

$$\Delta u = 0, \quad r < a, \quad (1)$$

wobei  $(r, \theta, \phi)$  die üblichen Kugelkoordinaten sind, d.h.

$$x_1 = r \sin \theta \cos \phi, \quad x_2 = r \sin \theta \sin \phi, \quad x_3 = r \cos \theta.$$

### Lösung

Wir benutzen die Formel

$$\Delta u = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2}$$

für den Laplace-Operator in Kugelkoordinaten, und suchen eine Lösung von (1) der Form

$$u(r, \theta, \phi) = G(r, \theta) f_1(\phi), \quad \text{‘Separationsansatz’}$$

so dass

$$\frac{\sin^2 \theta}{G} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial G}{\partial r} \right) + \frac{\sin \theta}{G} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial G}{\partial \theta} \right) = -\frac{f_1''(\phi)}{f_1(\phi)} = k_2.$$

Die Funktion  $f_1$  genügt also den Gleichungen

$$\begin{aligned} f_1''(\phi) + k_2 f_1(\phi) &= 0, \\ f_1(\phi + 2\pi) &= f_1(\phi). \end{aligned}$$

Wie im letzten Beispiel folgern wir nun  $k_2 = n^2$  mit  $n = 0, 1, \dots$  sowie

$$f_1(\phi) = \begin{cases} A_0, & n = 0, \\ A_n \cos(n\phi) + B_n \sin(n\phi), & n = 1, 2, \dots \end{cases}$$

Im zweiten Schritt suchen wir eine Lösung von

$$\sin^2 \theta \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial G}{\partial r} \right) + \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial G}{\partial \theta} \right) - n^2 G = 0$$

der Form

$$G(r, \theta) = f_2(r)f_3(\theta), \quad \text{‘Separationsansatz’}$$

so dass

$$r^2 \frac{f_2''(r)}{f_2(r)} + 2r \frac{f_2'(r)}{f_2(r)} = -\frac{1}{f_3(\theta)} \left( \cot \theta f_3'(\theta) + f_3''(\theta) - \frac{n^2}{\sin^2 \theta} \right) = k_2.$$

Die Gleichung für  $f_3$  lautet

$$\cot \theta f_3'(\theta) + f_3''(\theta) + \left( k_2 - \frac{n^2}{\sin^2 \theta} \right) f_3(\theta) = 0, \quad \theta \in [0, \pi]$$

und wird durch die Substitution

$$x = \cos \theta, \quad f(x) = f_3(\theta)$$

in

$$(1 - x^2)f''(x) - 2xf'(x) + \left( k_2 - \frac{n^2}{1 - x^2} \right) f(x) = 0 \quad x \in [-1, 1] \quad (2)$$

transformiert. Ergebnisse aus der Theorie gewöhnlicher Differentialgleichungen zeigen, dass (2) nur dann stetige Lösungen  $[-1, 1]$  besitzt, falls

$$k_2 = \ell(\ell + 1), \quad \ell = n, n + 1, \dots$$

ist. Die Gleichung

$$(1 - x^2)f''(x) - 2xf'(x) + \left( \ell(\ell + 1) - \frac{n^2}{1 - x^2} \right) f(x) = 0$$

heißt **Legendresche Differentialgleichung**. Diese hat nur eine eine Lösung, die auf  $[-1, 1]$  stetig ist, die **zugeordnete Legendre-Funktion**

$$P_\ell^n(x) = (-1)^n (1 - x^2)^{n/2} \frac{d^n}{dx^n} P_\ell(x),$$

wobei

$$P_\ell(x) = \underbrace{\frac{1}{2^\ell \ell!} \frac{d^\ell}{dx^\ell} (x^2 - 1)^\ell}_{\text{Legendre-Polynom}}$$

gilt.

Die allgemeine Lösung für  $f_3$  is also

$$f_3(\theta) = C_{\ell n} P_\ell^n(\cos \theta), \quad 0 \leq n \leq \ell,$$

und die entsprechende Gleichung für  $f_2$  ist

$$r^2 f_2''(r) + 2r f_2'(r) - \ell(\ell + 1) f_2(r) = 0.$$

Die allgemeine Lösung dieser **Euler-Gleichung** ist

$$f_1(r) = C_\ell r^\ell + \frac{D_\ell}{r^{\ell+1}}, \quad \ell = 0, 1, 2, \dots,$$

wobei wir  $B_\ell = 0$ ,  $\ell = 0, 1, 2, \dots$  setzen müssen, damit die Lösung zu (1) stetig im Nullpunkt ist. Die trennbaren Lösungen von (1) sind also

$$u_{\ell 0}(r, \theta, \phi) = A_{\ell 0} r^\ell P_\ell(\cos \theta), \quad \ell = 0, 1, 2, \dots,$$

$$u_{\ell n}(r, \theta, \phi) = (A_{\ell n} \cos(n\phi) + B_{\ell n} \sin(n\phi)) r^\ell P_\ell^n(\cos \theta), \quad 0 \leq n \leq \ell.$$

□

## 1.4 Über Saiten und Membrane

### Schwingende Saiten

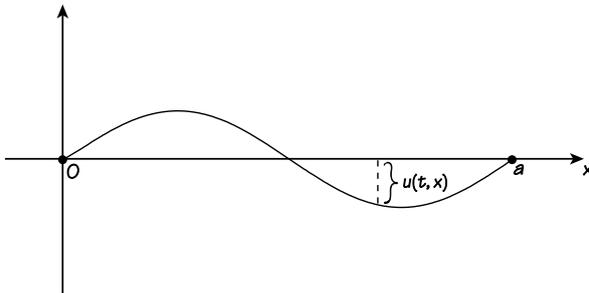
Die (1 + 1)-dimensionale Wellengleichung

$$u_{tt} = u_{xx}, \quad x \in (0, a), \quad t > 0 \quad (1)$$

mit Dirichletschen Randbedingungen

$$u(t, 0) = u(t, a) = 0 \quad t > 0 \quad (2)$$

entsteht bei der Modellierung einer eingespannten Saite.



$u(t, x)$  ist die Auslenkung des Punktes mit räumlicher Koordinate  $x$  zum Zeitpunkt  $t$

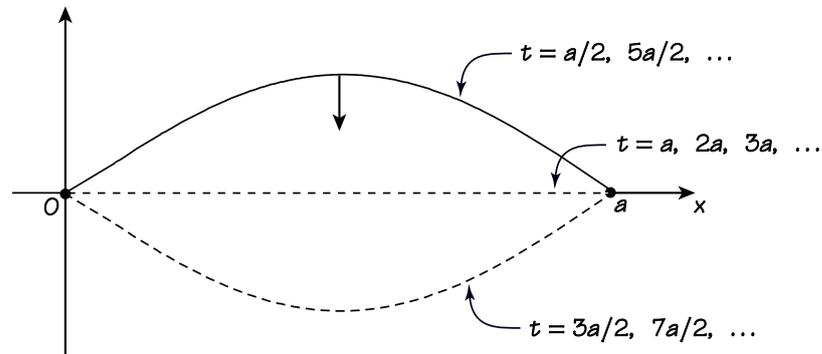
Annahme: Die Auslenkung ist senkrecht zum Gleichgewichtszustand.

Die trennbaren Lösungen dieses Problems sind

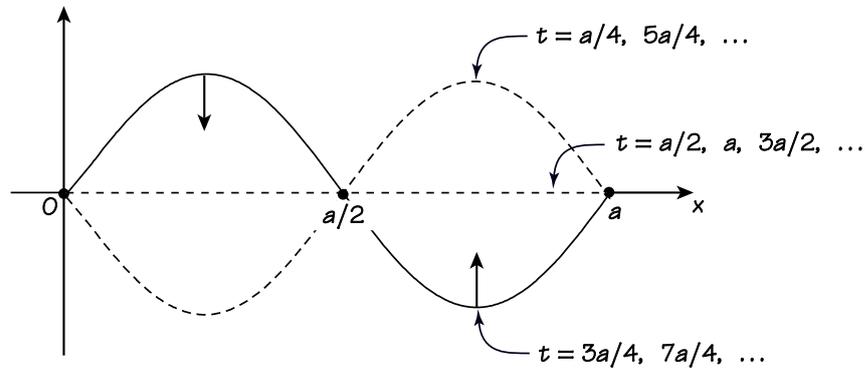
$$\begin{aligned} u_n(t, x) &= \sin \frac{n\pi x}{a} \left( A_n \sin \frac{n\pi t}{a} + B_n \cos \frac{n\pi t}{a} \right), \\ &= C_n \underbrace{\sin \frac{n\pi x}{a}}_{\text{beschreibt die räumliche Form der Lösung}} \underbrace{\sin \frac{n\pi}{a} (t - D_n)}_{\text{besagt, dass die Lösung zeitlich periodisch mit Frequenz } n\pi/a \text{ ist}}, \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

und werden **Normalmoden** genannt. Sie sind **stehende Wellen**, d.h. örtlich und zeitlich periodische Wellen.

$n = 1$  ( $D_n = 0$ )

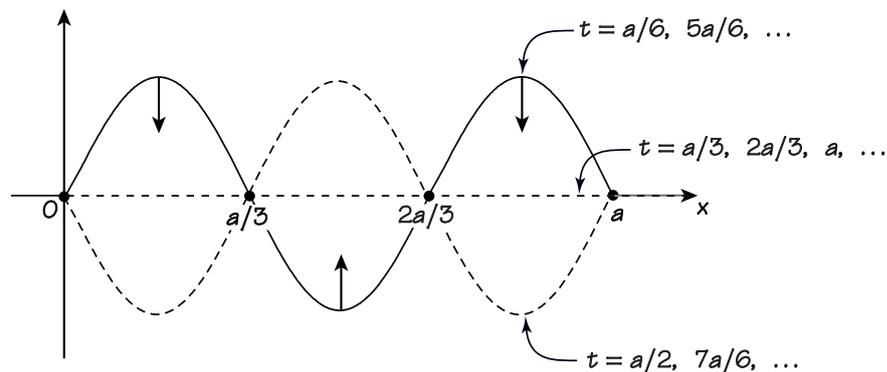


$n = 2$  ( $D_n = 0$ )



Beachte den **Knotenpunkt** bei  $x = a/2$ .

$n = 3$  ( $D_n = 0$ )



Beachte die Knotenpunkte bei  $x = a/3$  und  $x = 2a/3$ .

Die allgemeine Lösung von (1), (2) ist die 'unendliche Summe'

$$u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n\pi x}{a} \left( A_n \sin \frac{n\pi t}{a} + B_n \cos \frac{n\pi t}{a} \right).$$

Physikalisch gesehen ist dies eine **Superposition** aller möglichen Normalmoden, wobei jede einzelne Mode eine eigene Amplitude  $C_n$  und Phase  $D_n$  hat.

Die Koeffizienten  $A_n, B_n$  (bzw.  $C_n, D_n$ ) können durch die Anfangsbedingungen bestimmt werden:

$$\begin{aligned} u(0, x) = f(x) &\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin \frac{n\pi x}{a} = f(x) \\ &\Leftrightarrow B_n = \frac{2}{a} \int_0^a f(x) \sin \frac{n\pi x}{a} dx \\ u_t(0, x) = f(x) &\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} A_n \frac{n\pi}{a} \sin \frac{n\pi x}{a} = f(x) \\ &\Leftrightarrow A_n = \frac{a}{n\pi} \cdot \frac{2}{a} \int_0^a f(x) \sin \frac{n\pi x}{a} dx \end{aligned}$$

Physikalisch bedeutet dies, dass die erzeugte Schwingung davon abhängt, wie die Saite anfänglich gezupft wurde.

### Rechteckige Membrane

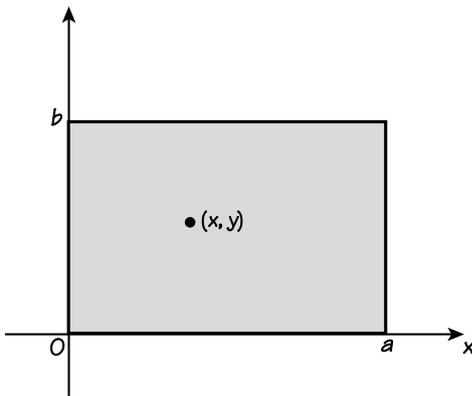
Die (2 + 1)-dimensionale Wellengleichung

$$u_{tt} = u_{xx} + u_{yy}, \quad x \in (0, a), \quad y \in (0, b), \quad t > 0 \quad (3)$$

mit Dirichletschen Randbedingungen

$$u(t, x, y) = 0 \quad \text{für alle } t \text{ und } x \in \{0, a\} \text{ oder } y \in \{0, b\} \quad (4)$$

entsteht bei der Modellierung eines eingespannten rechteckigen Membrans.



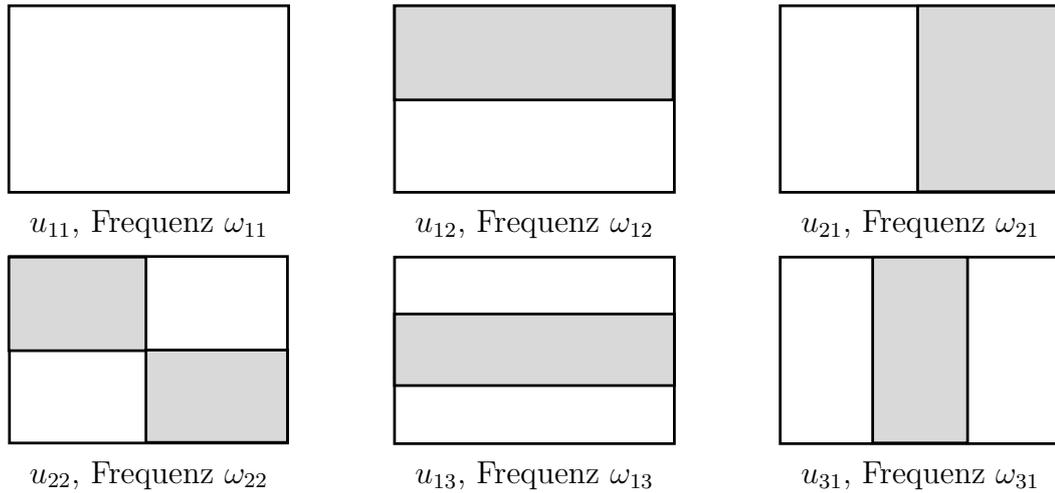
$u(t, x, y)$  ist die Auslenkung des Punktes mit räumlichen Koordinaten  $(x, y)$  zum Zeitpunkt  $t$

Die Normalmoden sind durch

$$\begin{aligned} u_{mn}(t, x, y) &= \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} (A_{mn} \sin \omega_{mn} t + B_{mn} \cos \omega_{mn} t) \\ &= C_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \sin \omega_{mn} (t - D_{mn}), \quad m, n = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

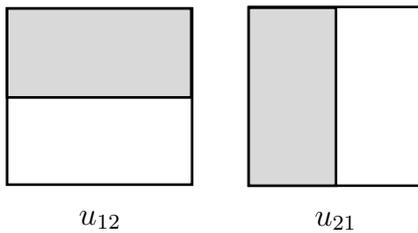
gegeben, und die entsprechenden Frequenzen sind

$$\omega_{mn} = \sqrt{\frac{m^2 \pi^2}{a^2} + \frac{n^2 \pi^2}{b^2}}.$$



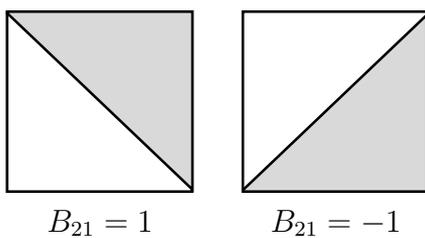
Dieses Diagramm zeigt die **Knotenlinien**, d.h. die Kurven mit  $u = 0$  für alle  $t$ , der ersten sechs Normalmoden. Die schraffierten und nicht-schraffierten Teile bewegen sich in entgegengesetzten Richtungen.

Falls  $a/b \in \mathbb{Q}$  ist, können verschiedene Werte von  $(m, n)$  Normalmoden mit derselben Frequenz erzeugen:

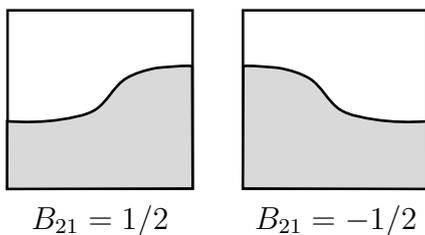


Im Falle einer quadratischen Membran ( $a = b$ ) haben  $u_{12}$  und  $u_{21}$  die **degenerierte** Frequenz  $\omega_{12} = \omega_{21} = \sqrt{5}\pi/a$

Die Funktion  $u_{12} + u_{21}$  ist daher eine stehende Welle mit Frequenz  $\sqrt{5}\pi/a$  für alle Werte von  $A_{12}$ ,  $A_{21}$ ,  $B_{12}$  und  $B_{21}$ :



In diesen vier Beispielen gilt  $A_{12} = A_{21} = 0$  und  $B_{12} = 1$ .



Die Knotenlinie ist jeweils durch

$$\left\{ (x, y) : \cos \frac{\pi y}{a} + B_{21} \cos \frac{\pi x}{a} = 0 \right\}$$

gegeben.

Die allgemeine Lösung von (3), (4) ist die Superposition

$$u(t, x, y) = \sum_{m,n=1}^{\infty} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} (A_{mn} \sin \omega_{mn} t + B_{mn} \cos \omega_{mn} t),$$

wobei die Koeffizienten  $A_{mn}$ ,  $B_{mn}$  durch die Anfangsbedingungen bestimmt werden können:

$$\begin{aligned} u(0, x, y) = f(x, y) &\Leftrightarrow \sum_{m,n=1}^{\infty} B_{m,n} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} = f(x, y) \\ &\Leftrightarrow B_{mn} = \frac{4}{ab} \int_0^b \int_0^a f(x, y) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} dx dy \\ u_t(0, x, y) = g(x, y) &\Leftrightarrow \sum_{m,n=1}^{\infty} \omega_{mn} A_{m,n} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} = g(x, y) \\ &\Leftrightarrow A_{mn} = \frac{4}{\omega_{mn} ab} \int_0^b \int_0^a g(x, y) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} dx dy \end{aligned}$$

### Kreisförmige Membrane

Die  $(2 + 1)$ -dimensionale Wellengleichung

$$u_{tt} = \Delta u, \quad |x| < a, \quad t > 0 \quad (5)$$

mit Dirichletschen Randbedingungen

$$u = 0, \quad |x| = a, \quad t > 0 \quad (6)$$

entsteht bei der Modellierung eines eingespannten kreisförmigen Membrans. Die Normalmoden und deren Frequenzen sind für  $m = 1, 2, \dots$  und  $n = 0, 1, \dots$  durch

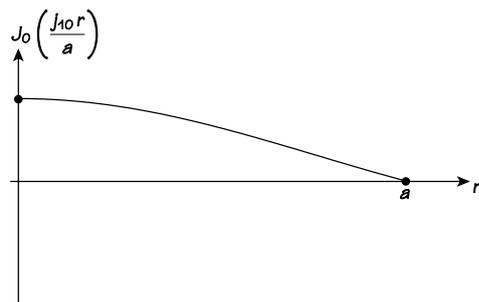
$$u_{m0}(t, r) = J_0 \left( \frac{j_{m0} r}{a} \right) (A_{m0} \sin \omega_{m0} t + B_{m0} \cos \omega_{m0} t), \quad \omega_{m0} = j_{m0}/a$$

bzw.

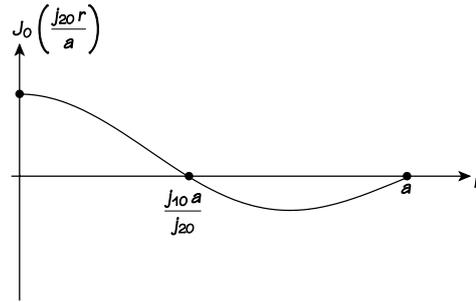
$$\begin{aligned} u_{mn}^1(t, r, \theta) &= J_n \left( \frac{j_{mn} r}{a} \right) \cos n\theta (A_{mn}^1 \sin \omega_{mn}^1 t + B_{mn}^1 \cos \omega_{mn}^1 t), \quad \omega_{mn}^1 = j_{mn}/a \\ u_{mn}^2(t, r, \theta) &= J_n \left( \frac{j_{mn} r}{a} \right) \sin n\theta (A_{mn}^2 \sin \omega_{mn}^2 t + B_{mn}^2 \cos \omega_{mn}^2 t) \quad \omega_{mn}^2 = j_{mn}/a \end{aligned}$$

gegeben, wobei  $J_n$  die  $n$ -te Besselsche Funktion erster Gattung und  $j_{mn}$  die  $m$ -te Nullstelle von  $J_n$  ist.

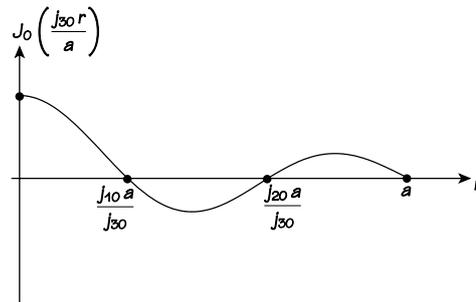
Die *radialsymmetrischen* Normalmoden sind durch  $u_{m0}$ , d.h.  $n = 0$  gegeben.



$u_{10}$  hat keine Knotenlinien.

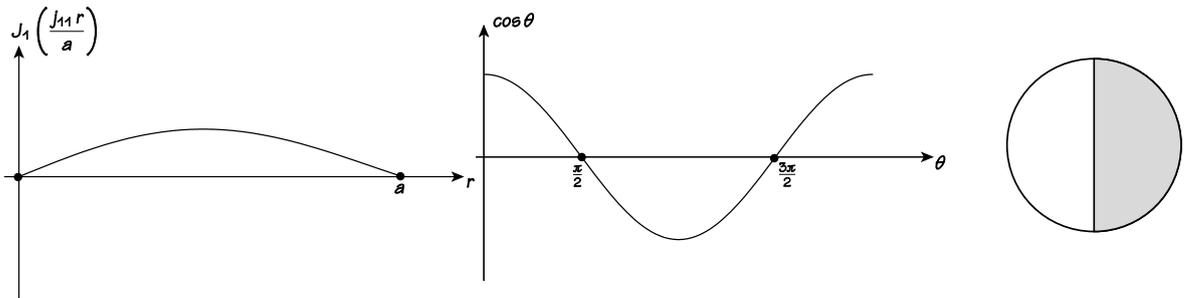


$u_{20}$  hat eine Knotenlinie bei  $r = \frac{j_{10}a}{j_{20}}$ .

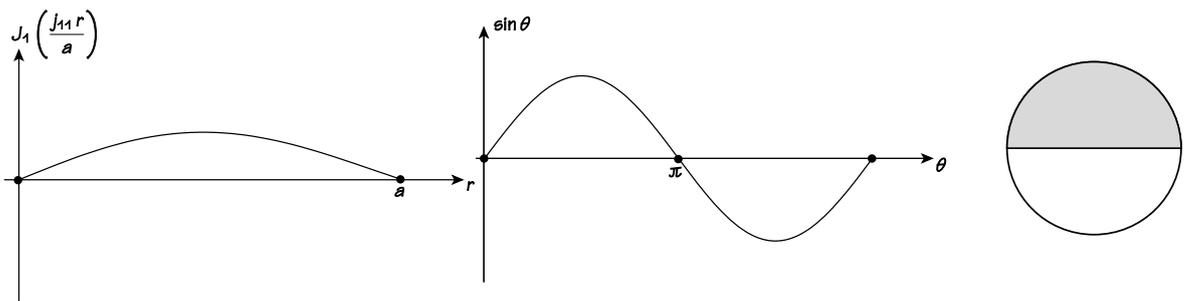


$u_{30}$  hat Knotenlinien bei  $r = \frac{j_{10}a}{j_{30}}$  und  $r = \frac{j_{20}a}{j_{30}}$ .

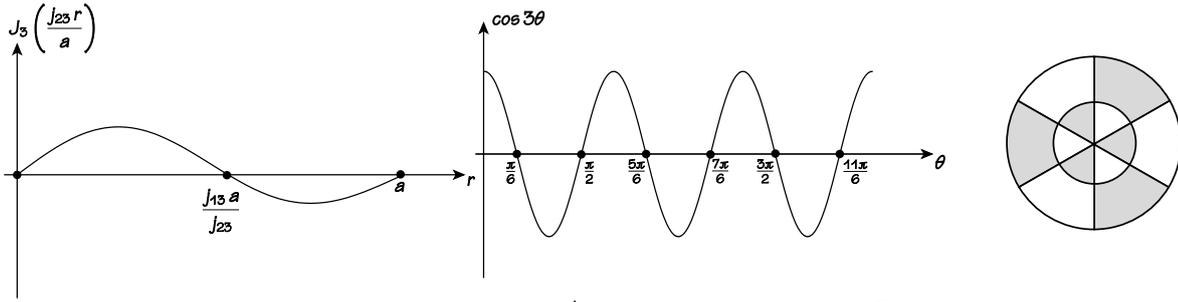
Da  $\omega_{mn}^1 = \omega_{mn}^2$  für  $n, m = 1, 2, \dots$  gilt, sind alle anderen Frequenzen degeneriert:



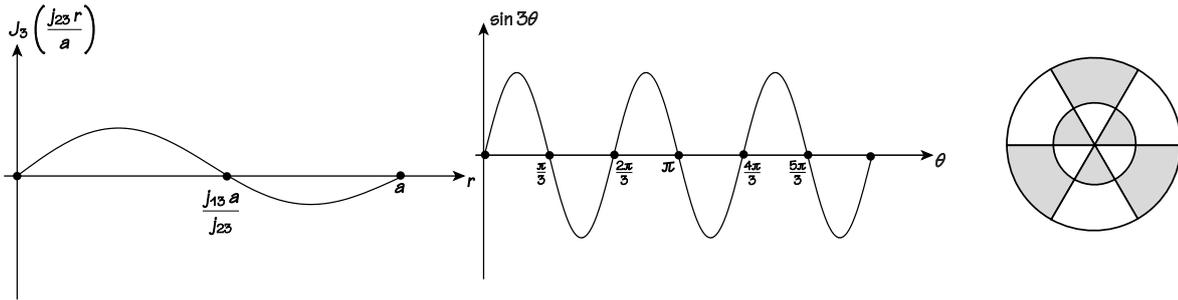
$u_{11}^1$  hat Knotenlinien bei  $\theta = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$ .



$u_{11}^2$  hat Knotenlinien bei  $\theta = 0, \pi$ .



$u_{23}^1$  hat Knotenlinien bei  $r = \frac{j_{11}a}{j_{21}}$  und  $\theta = \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}, \frac{11\pi}{6}$ .



$u_{23}^2$  hat Knotenlinien bei  $r = \frac{j_{11}a}{j_{21}}$  und  $\theta = 0, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \pi, \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}, 2\pi$ .

Die allgemeinste Schwingung ist die Superposition

$$\begin{aligned}
 u(t, r, \theta) = & \sum_{m=1}^{\infty} J_0\left(\frac{j_{m0}r}{a}\right) (A_{m0} \sin \omega_{m0}t + B_{m0} \cos \omega_{m0}t) \\
 & + \sum_{m,n=1}^{\infty} J_n\left(\frac{j_{mn}r}{a}\right) \cos n\theta (A_{mn}^1 \sin \omega_{mn}^1 t + B_{mn}^1 \cos \omega_{mn}^1 t) \\
 & + \sum_{m,n=1}^{\infty} J_n\left(\frac{j_{mn}r}{a}\right) \sin n\theta (A_{mn}^2 \sin \omega_{mn}^2 t + B_{mn}^2 \cos \omega_{mn}^2 t),
 \end{aligned} \tag{7}$$

wobei die Koeffizienten  $A_{m0}, B_{m0}, A_{mn}^1, B_{mn}^1, A_{mn}^2, B_{mn}^2$  durch die Anfangsbedingungen

$$u(0, r, \theta) = f(r, \theta), \tag{8}$$

$$u_t(0, r, \theta) = g(r, \theta) \tag{9}$$

bestimmt werden können. Um dies zu tun, benutzen wir die folgenden Orthogonalitätsrelationen.

### Lemma

Für  $n = 0, 1, 2, \dots$  gilt

$$\int_0^a r J_n\left(\frac{j_{kn}r}{a}\right) J_n\left(\frac{j_{mn}r}{a}\right) dr = 0, \quad k \neq m$$

und

$$\int_0^a r J_n\left(\frac{j_{kn}r}{a}\right)^2 = \frac{a^2}{2} J_{n+1}(j_{kn})^2.$$

Mit Hilfe dieser Relationen und den Anfangsbedingungen können wir die Koeffizienten nun wie folgt bestimmen. Aus (7) und (8) folgt

$$f(r, \theta) = \sum_{m=1}^{\infty} B_{m0} J_0 \left( \frac{j_{m0} r}{a} \right) + \sum_{m,n=1}^{\infty} B_{mn}^1 J_n \left( \frac{j_{mn} r}{a} \right) \cos n\theta + B_{mn}^2 J_n \left( \frac{j_{mn} r}{a} \right) \sin n\theta.$$

Dies ist gerade die Fourierreihendarstellung der Funktion  $\theta \mapsto f(r, \theta)$ , und deshalb gilt

$$\sum_{m=1}^{\infty} B_{m0} J_0 \left( \frac{j_{m0} r}{a} \right) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(r, \theta) d\theta, \quad (10)$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} B_{mn}^1 J_n \left( \frac{j_{mn} r}{a} \right) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(r, \theta) \cos n\theta d\theta, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (11)$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} B_{mn}^2 J_n \left( \frac{j_{mn} r}{a} \right) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(r, \theta) \sin n\theta d\theta, \quad n = 1, 2, \dots \quad (12)$$

Wir multiplizieren nun (10) mit  $r J_0 \left( \frac{j_{k0} r}{a} \right)$  und integrieren über  $(0, a)$ . Dies liefert

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^{\infty} B_{m0} \underbrace{\int_0^a r J_0 \left( \frac{j_{k0} r}{a} \right) J_0 \left( \frac{j_{m0} r}{a} \right) dr}_{= \frac{a^2}{2} J_1(j_{k0}) \delta_{km}} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^a \int_0^{2\pi} r J_0 \left( \frac{j_{k0} r}{a} \right) f(r, \theta) dr d\theta \\ &= \frac{a^2}{2} J_1(j_{k0}) \delta_{km} \end{aligned}$$

und damit

$$B_{k0} = \frac{1}{\pi a^2 J_1(j_{k0})^2} \int_0^a \int_0^{2\pi} r J_0 \left( \frac{j_{k0} r}{a} \right) f(r, \theta) dr d\theta, \quad k = 1, 2, \dots$$

Wir multiplizieren außerdem (11) und (12) mit  $r J_n \left( \frac{j_{kn} r}{a} \right)$  und integrieren wieder über  $(0, a)$ . Dies ergibt

$$B_{kn}^1 = \frac{1}{\pi a^2 J_{n+1}(j_{kn})^2} \int_0^a \int_0^{2\pi} r J_n \left( \frac{j_{kn} r}{a} \right) f(r, \theta) \cos n\theta dr d\theta, \quad k, n = 1, 2, \dots,$$

$$B_{kn}^2 = \frac{1}{\pi a^2 J_{n+1}(j_{kn})^2} \int_0^a \int_0^{2\pi} r J_n \left( \frac{j_{kn} r}{a} \right) f(r, \theta) \sin n\theta dr d\theta, \quad k, n = 1, 2, \dots$$

Damit haben wir die Koeffizienten  $B_{mn}$  Aus den Anfangsdaten für  $u$  berechnet. Durch analoge Rechnungen für die Anfangsdaten von  $u_t$  erhalten wir

$$A_{k0} = \frac{1}{\pi a^2 J_1(j_{k0})^2 \omega_{k0}} \int_0^a \int_0^{2\pi} r J_0 \left( \frac{j_{k0} r}{a} \right) g(r, \theta) dr d\theta, \quad k = 1, 2, \dots$$

und

$$A_{kn}^1 = \frac{1}{\pi a^2 J_{n+1}(j_{kn})^2 \omega_{kn}^1} \int_0^a \int_0^{2\pi} r J_n \left( \frac{j_{kn} r}{a} \right) g(r, \theta) \cos n\theta dr d\theta, \quad k, n = 1, 2, \dots,$$

$$A_{kn}^2 = \frac{1}{\pi a^2 J_{n+1}(j_{kn})^2 \omega_{kn}^2} \int_0^a \int_0^{2\pi} r J_n \left( \frac{j_{kn} r}{a} \right) g(r, \theta) \sin n\theta dr d\theta, \quad k, n = 1, 2, \dots$$

**Bemerkung**

$L^2(\Omega)$  sei der Raum aller über  $\Omega$  quadratisch integrierbaren Funktionen. Eine Folge  $\{u_m\}_{m=1}^\infty$  heißt **orthonormale Basis** für  $L^2(\Omega)$ , falls

- $\int_{\Omega} u_m u_k = \delta_{mk}$  (*Orthogonalität und Normalisierung*)
- jedes  $f \in L^2(\Omega)$  sich als

$$f = \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_m u_m, \quad \alpha_m = \int_{\Omega} f u_m$$

schreiben lässt. (*Vollständigkeit der Basis*)

In den obigen Beispielen nutzen wir folgende Fakten aus:

- $\left\{ \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{n\pi x}{a} \right\}_{n=1}^{\infty}$  ist eine orthonormale Basis für  $L^2(0, a)$
- $\left\{ \frac{2}{\sqrt{ab}} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \right\}_{m,n=1}^{\infty}$  ist eine orthonormale Basis für  $L^2((0, a) \times (0, b))$
- $\left\{ \frac{1}{\sqrt{\pi a} J_1(j_{k0})} J_0\left(\frac{j_{k0} r}{a}\right) \right\}_{k=1}^{\infty} \cup \left\{ \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi a} J_{n+1}(j_{kn})} J_n\left(\frac{j_{kn} r}{a}\right) \cos n\theta \right\}_{k,n=1}^{\infty}$   
 $\cup \left\{ \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi a} J_{n+1}(j_{kn})} J_n\left(\frac{j_{kn} r}{a}\right) \sin n\theta \right\}_{k,n=1}^{\infty}$

ist eine orthonormale Basis für  $L^2(\{r < a\})$ .

# Kapitel 2

## Die Wellengleichung

### 2.1 Wellengleichung im eindimensionalen Raum

In diesem Abschnitt betrachten wir das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} u_{tt} &= c^2 u_{xx} & x \in \mathbb{R}, t > 0, & (1) \\ u(0, x) &= f(x) & x \in \mathbb{R}, & (2) \\ u(t, 0) &= g(x) & t > 0. & (3) \end{aligned}$$

#### Die allgemeine Lösung

Führe die neuen Koordinaten

$$\xi = x - ct, \quad \eta = x + ct$$

ein. Aus der Kettenregel folgt

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} &= \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \eta} \\ &= \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \eta}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} &= \frac{\partial \xi}{\partial t} \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial \eta}{\partial t} \frac{\partial}{\partial \eta} \\ &= -c \frac{\partial}{\partial \xi} + c \frac{\partial}{\partial \eta}, \end{aligned}$$

so dass (1) in

$$\left(-c \frac{\partial}{\partial \xi} + c \frac{\partial}{\partial \eta}\right)^2 u = c^2 \left(\frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \eta}\right)^2 u,$$

d.h.

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial u}{\partial \eta}\right) = 0$$

transformiert wird. Die allgemeine Lösung dieser Gleichung ist

$$u(\xi, \eta) = F(\xi) + G(\eta),$$

wobei  $F$  und  $G$  beliebige Funktionen einer Veränderlichen sind. Die allgemeine Lösung von (1) ist daher

$$u(t, x) = \underbrace{F(x - ct)}_{\substack{\text{Eine Welle, die sich} \\ \text{von links nach rechts} \\ \text{mit Geschwindigkeit } c \\ \text{bewegt}}} + \underbrace{G(x + ct)}_{\substack{\text{Eine Welle, die sich} \\ \text{von rechts nach links} \\ \text{mit Geschwindigkeit } c \\ \text{bewegt}}} .$$

## Die d'Alembertsche Lösungsformel

Um die Funktionen  $F$  und  $G$  zu bestimmen, betrachten wir die Anfangsbedingungen (2) und (3). Es gilt:

$$\begin{aligned} f(x) &= F(x) + G(x), \\ g(x) &= -cF'(x) + cG'(x), \end{aligned}$$

so dass

$$\begin{aligned} F'(x) &= \frac{1}{2}f'(x) - \frac{1}{2c}g(x) \\ \Rightarrow F(x) - F(0) &= \frac{1}{2}f(x) - \frac{1}{2}f(0) - \frac{1}{2c} \int_0^x g(s) \, ds \\ G'(x) &= \frac{1}{2}f'(x) + \frac{1}{2c}g(x) \\ \Rightarrow G(x) - G(0) &= \frac{1}{2}f(x) - \frac{1}{2}f(0) + \frac{1}{2c} \int_0^x g(s) \, ds \end{aligned}$$

und daher

$$\begin{aligned} F(x - ct) - F(0) &= \frac{1}{2}f(x - ct) - \frac{1}{2}f(0) - \frac{1}{2c} \int_0^{x-ct} g(s) \, ds, \\ G(x + ct) - G(0) &= \frac{1}{2}f(x + ct) - \frac{1}{2}f(0) + \frac{1}{2c} \int_0^{x+ct} g(s) \, ds. \end{aligned}$$

Aus den letzten zwei Gleichungen folgt

$$\begin{aligned} u(t, x) &= F(x - ct) + G(x + ct) \\ &= \frac{1}{2} \left( f(x + ct) + f(x - ct) \right) + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(s) \, ds, \end{aligned}$$

da  $F(0) + G(0) = f(0)$  ist. Dies ist die **d'Alembertsche Lösung der Wellengleichung im eindimensionalen Raum**.

## Konsequenzen der d'Alembertschen Lösungsformel

1. Eindeutigkeit Die obige Berechnung zeigt, dass jede zweimal stetig differenzierbare Lösung  $u$  des Anfangswertproblems (1)–(3) durch die d'Alembertsche Formel gegeben ist.

2. Existenz Es seien  $f \in C^2(\mathbb{R})$  und  $g \in C^1(\mathbb{R})$ . Eine einfache Berechnung zeigt, dass die d'Alembertsche Formel eine Lösung von (1)–(3) definiert.
3. Stetige Abhängigkeit von den Anfangswerten Es seien  $u$  und  $\tilde{u}$  die Lösungen zu den Anfangswerten  $f, g$  bzw.  $\tilde{f}, \tilde{g}$ . Dann ist

$$\begin{aligned} & |u(t, x) - \tilde{u}(t, x)| \\ & \leq \frac{1}{2} \left( |f(x - ct) - \tilde{f}(x - ct)| + |f(x + ct) - \tilde{f}(x + ct)| \right) \\ & \quad + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} |g(s) - \tilde{g}(s)| ds \end{aligned}$$

und folglich

$$\begin{aligned} & \sup_{x \in \mathbb{R}} |u(t, x) - \tilde{u}(t, x)| \leq \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x) - \tilde{f}(x)| + t \sup_{x \in \mathbb{R}} |g(x) - \tilde{g}(x)| \\ \Rightarrow & \sup_{(t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}} |u(t, x) - \tilde{u}(t, x)| \leq \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x) - \tilde{f}(x)| + T \sup_{x \in \mathbb{R}} |g(x) - \tilde{g}(x)|. \end{aligned}$$

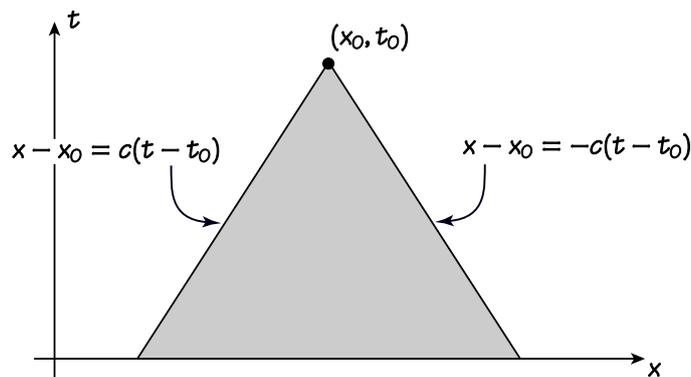
Betrachtet man die Lösung in einem endlichen Zeitintervall  $[0, T]$ , so hängt sie also stetig von  $f$  und  $g$  ab.

Zu 1.–3. sagt man, dass das Anfangswertproblem **wohlgestellt** ist.

4. Keine glättende Eigenschaft Es seien  $f \in C^k(\mathbb{R})$  und  $g \in C^{k-1}(\mathbb{R})$ . Aus der d'Alembertschen Formel folgt, dass  $u$   $k$ -mal stetig differenzierbar und **im Allgemeinen nicht regulärer** ist. Im Allgemeinen lässt sich die Regularität von  $u$  nur dadurch steigern, dass die Regularitätsvoraussetzungen an  $f$  und  $g$  erhöht werden.
5. Endliche Ausbreitungsgeschwindigkeit Die allgemeine Lösung besteht aus einer Welle, die sich nach links mit Geschwindigkeit  $c$  bewegt, und einer Welle, die sich nach rechts mit Geschwindigkeit  $c$  bewegt. Information breitet sich also mit Geschwindigkeit  $\pm c$  aus.
6. Abhängigkeitsbereich Da Information sich mit Geschwindigkeit  $\pm c$  ausbreitet, hängt der Wert von  $u$  an der Stelle  $(x_0, t_0)$  nur von den Werten von  $u$  (und  $u_t$ ) in dem nach unten gerichteten Kegel

$$\{(x, t) : |x - x_0| \leq c(t_0 - t), t < t_0\}$$

in der **Raumzeit** ab:



Die schraffierte Region ist der **Abhängigkeitsbereich** von  $(x_0, t_0)$ .

Die Geraden mit Steigungen  $\pm 1/c$  durch  $(x_0, t_0)$  sind die **Charakteristischen** durch  $(x_0, t_0)$ .

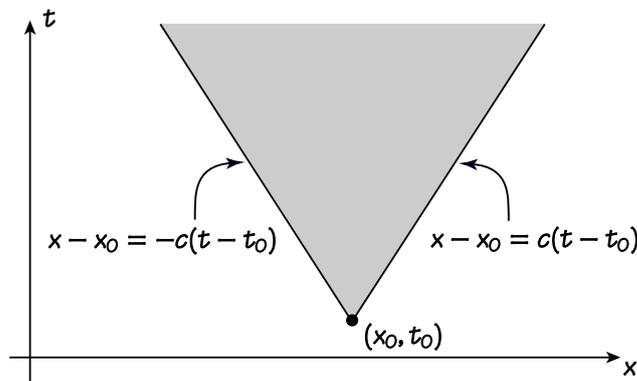
7. Einflussbereich Der **Einflussbereich** von  $(x_0, t_0)$  ist die Menge

$$\{(x, t) : (x_0, t_0) \text{ liegt im Abhängigkeitsbereich von } (x, t)\}.$$

Er ist der nach oben gerichtete Kegel

$$\{(x, t) : |x - x_0| \leq c(t - t_0), t > t_0\}$$

in der Raumzeit:



Die schraffierte Region ist der **Einflussbereich** von  $(x_0, t_0)$ .

8. Schwache Lösungen Die d'Alembertsche Formel definiert eine gültige Funktion  $\overline{u}(t, x)$  auch im Falle  $f \notin C^2(\mathbb{R})$ ,  $g \notin C^1(\mathbb{R})$ . Eine solche Funktion heißt **schwache Lösung** der Wellengleichung im eindimensionalen Raum.

### Beispiel

Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} u_{tt} &= c^2 u_{xx}, & x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ u(0, x) &= f(x), & x \in \mathbb{R}, \\ u_t(0, x) &= 0, & x \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

wobei

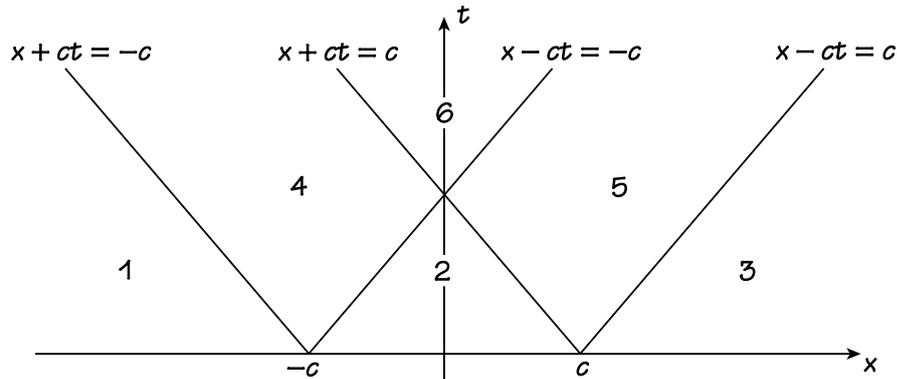
$$f(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leq c, \\ 0, & |x| > c. \end{cases}$$

**Lösung**

Die Lösung ist

$$u(t, x) = \frac{1}{2} \left( f(x + ct) + f(x - ct) \right),$$

und wir können eine explizite Formel für  $u$  finden, indem wir ein **Raumzeitdiagramm** benutzen:



- Region 1 ( $x + ct < -c, x - ct < -c$ ):  $u(x, t) = 0$
- Region 2 ( $-c < x + ct < c, -c < x - ct < c$ ):  $u(x, t) = 1$
- Region 3 ( $x + ct > c, x - ct > c$ ):  $u(x, t) = 0$
- Region 4 ( $-c < x + ct < c, x - ct < -c$ ):  $u(x, t) = 1/2$
- Region 5 ( $x + ct > c, -c < x - ct < c$ ):  $u(x, t) = 1/2$
- Region 6 ( $x + ct > c, x - ct < -c$ ):  $u(x, t) = 0$

□

**Die Wellengleichung im Halbraum**

In diesem Abschnitt betrachten wir das Rand-Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} u_{tt} &= c^2 u_{xx} & x > 0, \quad t > 0, \\ u(t, 0) &= 0 & t > 0, \\ u(0, x) &= f(x) & x > 0, \\ u_t(0, x) &= g(x) & x > 0, \end{aligned}$$

wobei  $f(0) = g(0) = 0$  ist.

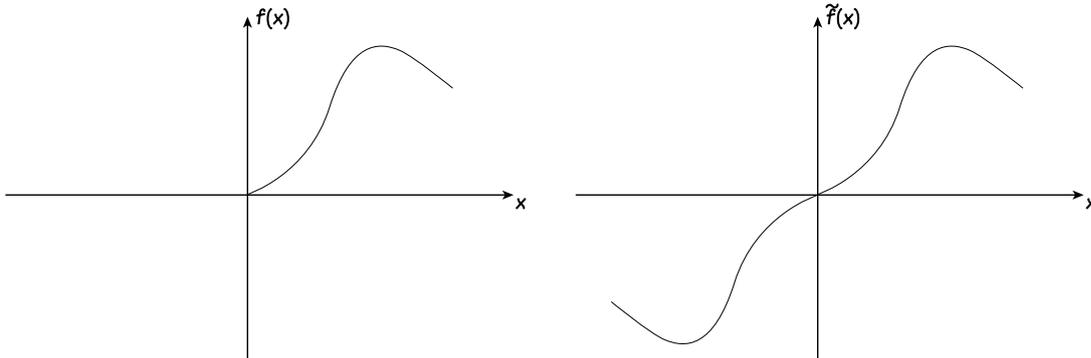
Wir können dieses Problem lösen, indem wir  $u$ ,  $f$  und  $g$  auf ganz  $\mathbb{R}$  durch eine Spiege-

lung im Ursprung fortsetzen. Definiere

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & x \geq 0, \\ -f(-x), & x < 0, \end{cases}$$

$$\tilde{g}(x) = \begin{cases} g(x), & x \geq 0, \\ -g(-x), & x < 0, \end{cases}$$

$$\tilde{u}(t, x) = \begin{cases} u(t, x), & x \geq 0, \\ -u(t, -x), & x < 0 : \end{cases}$$



Dann gilt

$$\begin{aligned} \tilde{u}_{tt} &= c^2 \tilde{u}_{xx}, & x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ \tilde{u}(0, x) &= \tilde{f}(x), & x \in \mathbb{R}, \\ \tilde{u}_t(0, x) &= \tilde{g}(x), & x \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

so dass  $\tilde{u}$  durch die d'Alembertsche Formel

$$\tilde{u}(t, x) = \frac{1}{2} \left( \tilde{f}(x + ct) + \tilde{f}(x - ct) \right) + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} \tilde{g}(s) ds$$

gegeben ist. Folglich ist

$$u(t, x) = \frac{1}{2} \left( \tilde{f}(x + ct) + \tilde{f}(x - ct) \right) + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} \tilde{g}(s) ds, \quad x > 0.$$

### Bemerkung

Die Lösung des Anfangsrandwertproblems

$$\begin{aligned} u_{tt} &= c^2 u_{xx}, & x > 0, t > 0, \\ u_x(t, 0) &= 0, & t > 0, \\ u(0, x) &= f(x), & x > 0, \\ u_t(0, x) &= g(x), & x > 0, \end{aligned}$$

wobei  $f'(0) = g'(0) = 0$  ist, wird analog gefunden, indem man  $u$ ,  $f$  und  $g$  auf ganz  $\mathbb{R}$  durch eine gewöhnliche Spiegelung fortsetzt.

## 2.2 Wellengleichung im dreidimensionalen Raum

### Radialsymmetrische Lösungen

Wir studieren zunächst den Fall radialsymmetrischer Daten, d.h. wir betrachten das Anfangswertproblem

$$u_{tt} = c^2 \Delta u \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3, t > 0, \quad (1)$$

$$u(0, \mathbf{x}) = f(r) \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3, \quad (2)$$

$$u_t(0, \mathbf{x}) = g(r) \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3, \quad (3)$$

wobei  $r = |\mathbf{x}|$  ist.

Wir suchen zunächst radialsymmetrische Lösungen der Form  $u = u(t, r)$  (später werden wir sehen, dass jede Lösung mit radialsymmetrischen Daten selbst radialsymmetrisch sein muss). Das Anfangswertproblem (1)–(3) kann nun wie folgt geschrieben werden

$$u_{tt} = c^2 \left( u_{rr} + \frac{2}{r} u_r \right), \quad r > 0, t > 0,$$

$$u(0, r) = f(r), \quad r > 0,$$

$$u_t(0, r) = g(r), \quad r > 0.$$

Wir lösen dieses Problem durch die Substitution  $U = ru$ . Aus

$$U_{tt} = ru_{tt}, \quad U_{rr} = 2u_r + ru_{rr}$$

folgt

$$U_{tt} = c^2 U_{rr}, \quad r > 0, t > 0,$$

$$U(t, 0) = 0, \quad t > 0,$$

$$U(0, r) = F(r), \quad r > 0,$$

$$U_t(0, r) = G(r), \quad r > 0,$$

wobei  $F(r) = rf(r)$  und  $G(r) = rg(r)$  ist.  $U(t, r)$  löst also die Wellengleichung im Halbraum  $\{r > 0\}$  mit Dirichletscher Randbedingung bei  $r = 0$ , so dass

$$U(t, r) = \frac{1}{2} \left( \tilde{F}(r+ct) + \tilde{F}(r-ct) \right) + \frac{1}{2c} \int_{r-ct}^{r+ct} \tilde{G}(s) ds, \quad r > 0,$$

wobei  $\tilde{F}, \tilde{G}$  die Fortsetzungen von  $F$  bzw.  $G$  auf  $\{r \in \mathbb{R}\}$  durch eine Spiegelung im Ursprung sind. Folglich ist

$$u(t, r) = \frac{1}{2r} \left( \tilde{F}(r+ct) + \tilde{F}(r-ct) \right) + \frac{1}{2cr} \int_{r-ct}^{r+ct} \tilde{G}(s) ds, \quad r > 0.$$

### Allgemeine Lösungen

Wir betrachten nun das allgemeine Anfangswertproblem

$$u_{tt} = c^2 \Delta u \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3, t > 0, \quad (4)$$

$$u(0, \mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3, \quad (5)$$

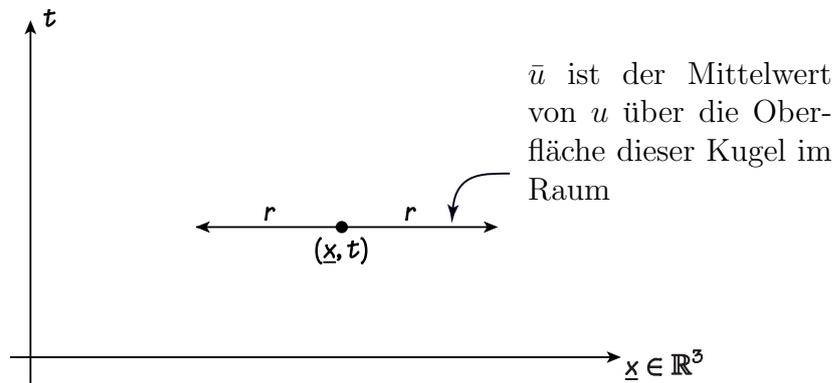
$$u_t(0, \mathbf{x}) = g(\mathbf{x}) \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3, \quad (6)$$

mit der **Methode der sphärischen Mittel**.

Wähle  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ ,  $r > 0$ ,  $t > 0$  und definiere

$$\begin{aligned}\bar{f}(\mathbf{x}, r) &= \frac{1}{4\pi r^2} \int_{\partial B_r(\mathbf{x})} f(\mathbf{y}) \, dS(\mathbf{y}), \\ \bar{g}(\mathbf{x}, r) &= \frac{1}{4\pi r^2} \int_{\partial B_r(\mathbf{x})} g(\mathbf{y}) \, dS(\mathbf{y}), \\ \bar{u}(\mathbf{x}, r, t) &= \frac{1}{4\pi r^2} \int_{\partial B_r(\mathbf{x})} u(t, \mathbf{y}) \, dS(\mathbf{y}),\end{aligned}$$

wobei  $dS$  das natürliche Oberflächenmaß auf der Kugel  $\partial B_r(\mathbf{x})$  ist.



### Lemma

Es sei  $u(t, \mathbf{x})$  eine Lösung des Anfangswertproblem (4)–(6). Für jedes feste  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$  genügen die sphärischen Mittel  $\bar{u}$ ,  $\bar{f}$ ,  $\bar{g}$  den **Euler-Poisson-Darboux-Gleichungen**

$$\begin{aligned}\bar{u}_{tt} &= c^2 \left( \bar{u}_{rr} + \frac{2}{r} \bar{u}_r \right), & r > 0, \quad t > 0, \\ \bar{u}(\mathbf{x}, r, 0) &= \bar{f}(\mathbf{x}, r), & r > 0, \\ \bar{u}_t(\mathbf{x}, r, 0) &= \bar{g}(\mathbf{x}, r), & r > 0.\end{aligned}$$

### Beweis

Die Gleichung

$$\int_{B_r(\mathbf{x})} u_{tt}(t, \mathbf{y}) \, dV(\mathbf{y}) = c^2 \int_{B_r(\mathbf{x})} \Delta u(t, \mathbf{y}) \, dV(\mathbf{y}) = c^2 \int_{\partial B_r(\mathbf{x})} \frac{\partial u}{\partial n}(t, \mathbf{y}) \, dS(\mathbf{y}) \quad (7)$$

folgt aus (4) und der Vektoridentität

$$\int_V \Delta w(\mathbf{y}) \, dV(\mathbf{y}) = \int_{\partial V} \frac{\partial w}{\partial n}(\mathbf{y}) \, dS(\mathbf{y}).$$

Auf der Kugel  $B_r(\mathbf{x})$  führen wir nun Kugelkoordinaten

$$\mathbf{y} = \mathbf{x} + \begin{pmatrix} \rho \sin \theta \cos \phi \\ \rho \sin \theta \sin \phi \\ \rho \cos \theta \end{pmatrix}$$

ein. Unter Verwendung der Integralsätze finden wir

$$\begin{aligned}
\int_{B_r(\mathbf{x})} u_{tt}(t, \mathbf{y}) \, dV(\mathbf{y}) &= \int_0^r \int_0^{2\pi} \int_0^\pi u_{tt}(t, \rho, \theta, \phi) \rho^2 \sin \theta \, d\theta \, d\phi \, d\rho \\
&= \int_0^r 4\pi \rho^2 \underbrace{\left( \frac{1}{4\pi \rho^2} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi u_{tt}(t, \rho, \theta, \phi) \rho^2 \sin \theta \, d\theta \, d\phi \right)}_{= \frac{1}{4\pi \rho^2} \int_{\partial B_\rho(\mathbf{x})} u_{tt}(t, \mathbf{y}) \, dS(\mathbf{y})} \, d\rho \\
&= \int_0^r 4\pi \rho^2 \bar{u}_{tt}(\mathbf{x}, \rho, t) \, d\rho. \tag{8}
\end{aligned}$$

Mit

$$\frac{\partial}{\partial n} u(t, \mathbf{y}) = \left( \frac{\partial}{\partial \rho} u(t, \rho, \theta, \phi) \right) \Big|_{\rho=r} = \frac{\partial}{\partial r} u(t, r, \theta, \phi) \quad \text{für alle } \mathbf{y} \in \partial B_r(x)$$

gilt außerdem

$$\begin{aligned}
\int_{\partial B_r(\mathbf{x})} \frac{\partial u}{\partial n}(t, \mathbf{y}) \, dS(\mathbf{y}) &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{\partial u}{\partial \rho}(t, \rho, \theta, \phi) \Big|_{\rho=r} r^2 \sin \theta \, d\theta \, d\phi \\
&= r^2 \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{\partial u}{\partial r}(t, r, \theta, \phi) \sin \theta \, d\theta \, d\phi \\
&= r^2 \frac{\partial}{\partial r} \left( \int_0^{2\pi} \int_0^\pi u(t, r, \theta, \phi) \sin \theta \, d\theta \, d\phi \right) \\
&= 4\pi r^2 \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{4\pi r^2} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi u(t, r, \theta, \phi) r^2 \sin \theta \, d\theta \, d\phi \right) \\
&= 4\pi r^2 \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{4\pi r^2} \int_{\partial B_r(\mathbf{x})} u(t, \mathbf{y}) \, dS(\mathbf{y}) \right) \\
&= 4\pi r^2 \frac{\partial \bar{u}}{\partial r}(\mathbf{x}, r, t). \tag{9}
\end{aligned}$$

Aus (7)–(9) folgt

$$\int_0^r \rho^2 \bar{u}_{tt}(\mathbf{x}, \rho, t) \, d\rho = c^2 r^2 \frac{\partial \bar{u}}{\partial r}(\mathbf{x}, r, t),$$

und Differenzieren nach  $r$  liefert

$$r^2 \bar{u}_{tt} = c^2 (2r \bar{u}_r + r^2 \bar{u}_{rr})$$

und damit

$$\bar{u}_{tt} = c^2 \left( \bar{u}_{rr} + \frac{2}{r} \bar{u}_r \right).$$

Die Gleichungen

$$\bar{u}(\mathbf{x}, r, 0) = \bar{f}(\mathbf{x}, r), \quad \bar{u}_t(\mathbf{x}, r, 0) = \bar{g}(\mathbf{x}, r)$$

folgen schließlich direkt aus

$$u(0, \mathbf{x}) = f(\mathbf{x}), \quad u_t(0, \mathbf{x}) = g(\mathbf{x}).$$

□

Das soeben bewiesene Lemma besagt: Für jedes feste  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$  ist die Funktion  $\bar{u}$  eine radialsymmetrische Lösung der Wellengleichung im dreidimensionalen Raum mit Anfangswerten  $\bar{f}$ ,  $\bar{g}$ . Daher gilt

$$\bar{u}(\mathbf{x}, r, t) = \frac{1}{2r} \left( \tilde{F}(\mathbf{x}, r + ct) + \tilde{F}(\mathbf{x}, r - ct) \right) + \frac{1}{2cr} \int_{r-ct}^{r+ct} \tilde{G}(\mathbf{x}, s) \, ds,$$

wobei  $\tilde{F}$ ,  $\tilde{G}$  die Fortsetzungen von  $F(\mathbf{x}, r) := r\bar{f}(\mathbf{x}, r)$  bzw.  $G(\mathbf{x}, r) := r\bar{g}(\mathbf{x}, r)$  von  $\{r > 0\}$  auf  $\{r \in \mathbb{R}\}$  durch eine Spiegelung im Ursprung sind, d.h.

$$\begin{aligned} \tilde{F}(\mathbf{x}, r) &= \begin{cases} r\bar{f}(\mathbf{x}, r), & r \geq 0, \\ r\bar{f}(\mathbf{x}, -r), & r < 0, \end{cases} \\ \tilde{G}(\mathbf{x}, r) &= \begin{cases} r\bar{g}(\mathbf{x}, r), & r \geq 0, \\ r\bar{g}(\mathbf{x}, -r), & r < 0. \end{cases} \end{aligned}$$

### Satz

Jede Lösung  $u(t, \mathbf{x})$  des Anfangswertproblem (4)–(6) ist durch

$$u(t, \mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi c^2 t} \int_{\partial B_{ct}(\mathbf{x})} g(\mathbf{y}) \, dS(\mathbf{y}) + \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{4\pi c^2 t} \int_{\partial B_{ct}(\mathbf{x})} f(\mathbf{y}) \, dS(\mathbf{y}) \right)$$

gegeben. Diese Formel wird die **Kirchhoffsche Formel** genannt.

### Beweis

Der Schlüssel für den Beweis ist die Beobachtung, dass

$$u(t, \mathbf{x}) = \lim_{r \downarrow 0} \bar{u}(\mathbf{x}, r, t)$$

für jedes feste  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$  und  $t > 0$  gilt.

Da wir den Grenzwert  $r \downarrow 0$  für festes  $t$  und  $\mathbf{x}$  untersuchen, dürfen wir annehmen, dass  $0 < r < ct$  ist. In diesem Fall gilt

$$\begin{aligned} \bar{u}(\mathbf{x}, r, t) &= \frac{1}{2r} \left( (r + ct)\bar{f}(\mathbf{x}, r + ct) + (r - ct)\bar{f}(\mathbf{x}, ct - r) \right) \\ &\quad + \frac{1}{2cr} \int_0^{r+ct} s\bar{g}(\mathbf{x}, s) \, ds + \frac{1}{2cr} \underbrace{\int_{r-ct}^0 s\bar{g}(\mathbf{x}, -s) \, ds}_{= - \int_0^{ct-r} s\bar{g}(\mathbf{x}, s) \, ds} \\ &= \frac{1}{2r} \left( (ct + r)\bar{f}(\mathbf{x}, ct + r) - (ct - r)\bar{f}(\mathbf{x}, ct - r) \right) + \frac{1}{2cr} \int_{ct-r}^{ct+r} s\bar{g}(\mathbf{x}, s) \, ds. \end{aligned}$$

Da

$$\lim_{h \downarrow 0} \frac{1}{2h} \int_{a-h}^{a+h} H(s) \, ds = H(a)$$

für alle stetigen Funktionen  $H$  gilt, finden wir

$$\begin{aligned} \lim_{r \downarrow 0} \frac{1}{2cr} \int_{ct-r}^{ct+r} s \bar{g}(\mathbf{x}, s) \, ds &= \frac{1}{c} ct \bar{g}(\mathbf{x}, ct) \\ &= t \frac{1}{4\pi c^2 t^2} \int_{\partial B_{ct}(\mathbf{x})} g(\mathbf{y}) \, dS(\mathbf{y}) \\ &= \frac{1}{4\pi c^2 t} \int_{\partial B_{ct}(\mathbf{x})} g(\mathbf{y}) \, dS(\mathbf{y}) \end{aligned}$$

und unter Zuhilfenahme von

$$\lim_{h \downarrow 0} \frac{1}{2h} \left( H(a+h) - H(a-h) \right) = H'(a)$$

finden wir

$$\begin{aligned} \lim_{r \downarrow 0} \frac{1}{2r} \left( (ct+r) \bar{f}(\mathbf{x}, ct+r) - (ct-r) \bar{f}(\mathbf{x}, ct-r) \right) \\ &= \left. \frac{\partial}{\partial \xi} (\xi \bar{f}(\mathbf{x}, \xi)) \right|_{\xi=ct} \\ &= \bar{f}(\mathbf{x}, ct) + ct \bar{f}_r(\mathbf{x}, ct) \\ &= \frac{\partial}{\partial t} (t \bar{f}(\mathbf{x}, ct)) \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{4\pi c^2 t} \int_{\partial B_{ct}(\mathbf{x})} f(\mathbf{y}) \, dS(\mathbf{y}) \right). \end{aligned}$$

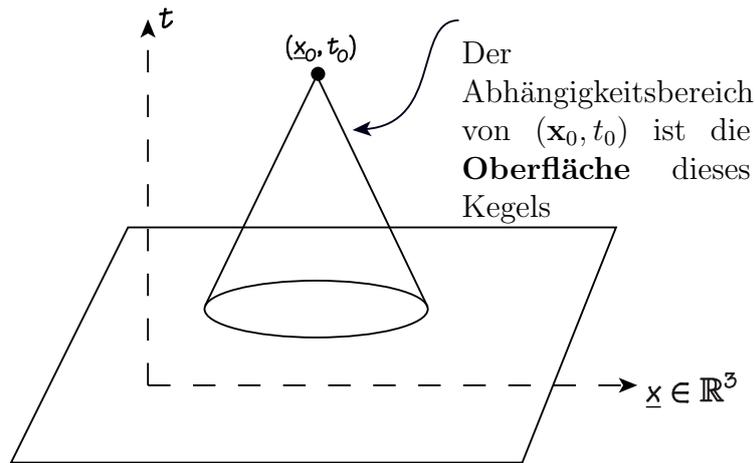
Damit ist die Behauptung bewiesen. □

### Bemerkungen

1. Der obige Satz impliziert die Eindeutigkeit der Lösung: Jede Lösung des Anfangswertproblems (1)–(3) ist durch die Kirchhoffsche Formel gegeben. Die Existenz einer Lösung folgt daraus, dass die Kirchhoffsche Formel eine Lösung des Anfangswertproblems definiert, wie eine einfache Berechnung zeigt.
2. Genauer gesagt, für  $f, g \in C^2(\mathbb{R}^3)$  liefert die Kirchhoffsche Formel die Existenz einer *klassischen Lösung*, die die Differentialgleichung (4) punktweise erfüllt. Die Kirchhoffsche Formel kann jedoch auch für allgemeinere Funktionen  $f$  und  $g$  ausgewertet werden (es müssen nur alle Terme wohldefiniert sein), liefert dann aber i.A. nur *schwache Lösungen*.
3. Da Information sich mit Geschwindigkeit  $c$  ausbreitet, hängt der Wert von  $u$  an der Stelle  $(\mathbf{x}_0, t_0)$  nur von den Werten von  $u$  (und  $u_t$ ) in dem nach unten gerichteten Kegel  $\{(\mathbf{x}, t) : |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| \leq c(t_0 - t), t < t_0\}$  in der Raumzeit ab. Allerdings enthält die Kirchhoffsche Formel nur Integrale über sphärische **Oberflächen**, so dass der Abhängigkeitsbereich von  $(\mathbf{x}_0, t_0)$  die Oberfläche

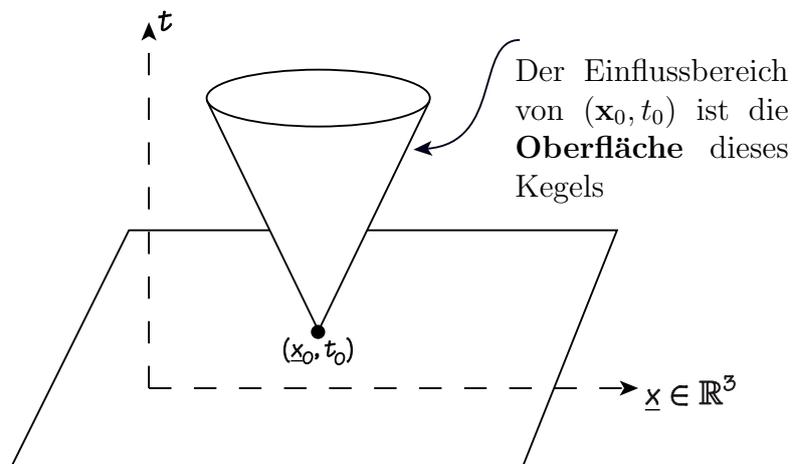
$$\{(\mathbf{x}, t) : |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| = c(t_0 - t), t < t_0\}$$

des Kegels ist.



Der Einflussbereich von  $(\mathbf{x}_0, t_0)$  ist die Oberfläche des entsprechenden nach oben gerichteten Kegels, d.h.

$$\{(\mathbf{x}, t) : |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| = c(t - t_0), t > t_0\}.$$



Dieses Ergebnis ist **das Huygensche Prinzip** für die dreidimensionale Wellengleichung.

## 2.3 Wellengleichung im zweidimensionalen Raum

In diesem Abschnitt lösen wir das Anfangswertproblem

$$u_{tt} = c^2(u_{xx} + u_{yy}) \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2, t > 0, \quad (1)$$

$$u(0, x, y) = f(x, y) \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad (2)$$

$$u_t(0, x, y) = g(x, y) \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2. \quad (3)$$

**Satz**

Jede Lösung  $u(t, x, y)$  des Anfangswertproblems (1)–(3) ist durch

$$u(t, x, y) = \frac{1}{2\pi c} \iint_{B_{ct}(x,y)} \frac{g(\tilde{x}, \tilde{y})}{(c^2 t^2 - (\tilde{x} - x)^2 - (\tilde{y} - y)^2)^{1/2}} d\tilde{x} d\tilde{y} \\ + \frac{1}{2\pi c} \frac{\partial}{\partial t} \left( \iint_{B_{ct}(x,y)} \frac{f(\tilde{x}, \tilde{y})}{(c^2 t^2 - (\tilde{x} - x)^2 - (\tilde{y} - y)^2)^{1/2}} d\tilde{x} d\tilde{y} \right)$$

gegeben. Diese Formel wird die **Poissonsche Formel** genannt.

**Beweis**

Wir betrachten  $u(t, x, y)$  als Funktion  $u(t, \mathbf{x})$ ,  $\mathbf{x} = (x, y, z)$ , die nicht von  $z$  abhängt und daher die Wellengleichung

$$u_{tt} = c^2 \Delta u, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3, \quad t > 0$$

mit Anfangswerten  $u|_{t=0} = f$ ,  $u_t|_{t=0} = g$  erfüllt, wobei  $f(x, y)$ ,  $g(x, y)$  ebenfalls als  $z$ -unabhängige Funktionen  $f(\mathbf{x})$ ,  $g(\mathbf{x})$  betrachtet werden. Laut der Kirchhoffschen Formel gilt also

$$u(t, x, y) = u(t, \mathbf{x}) \Big|_{z=0} \\ = \frac{1}{4\pi c^2 t} \int_{\partial B_{ct}(x,y,0)} g(\mathbf{y}) dS(\mathbf{y}) + \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{4\pi c^2 t} \int_{\partial B_{ct}(x,y,0)} f(\mathbf{y}) dS(\mathbf{y}) \right).$$

Wir erhalten die Poissonsche Formel, indem wir über  $z$  in der obigen Formel integrieren. Dies ist die **Hadamardsche Abstiegsmethode**.

Es gilt

$$\begin{aligned} \partial B_{ct}(x, y, 0) &= \{(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) : (\tilde{x} - x)^2 + (\tilde{y} - y)^2 + \tilde{z}^2 = c^2 t^2\} \\ &= \{(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) : (\tilde{x} - x)^2 + (\tilde{y} - y)^2 \leq c^2 t^2, \tilde{z} = \pm h(\tilde{x}, \tilde{y})\} \\ &= \{(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) : (\tilde{x}, \tilde{y}) \in B_{ct}(x, t), \tilde{z} = \pm h(\tilde{x}, \tilde{y})\}, \end{aligned}$$

wobei

$$h(\tilde{x}, \tilde{y}) = (c^2 t^2 - (\tilde{x} - x)^2 - (\tilde{y} - y)^2)^{1/2}$$

ist. Damit ist

$$\begin{aligned} \int_{\partial B_{ct}(x,y,0)} g(\mathbf{y}) dS(\mathbf{y}) &= 2 \iint_{B_{ct}(x,y)} g(\tilde{x}, \tilde{y}) (1 + h_x^2 + h_y^2)^{1/2} d\tilde{x} d\tilde{y} \\ &= 2ct \iint_{B_{ct}(x,y)} \frac{g(\tilde{x}, \tilde{y})}{(c^2 t^2 - (\tilde{x} - x)^2 - (\tilde{y} - y)^2)^{1/2}} d\tilde{x} d\tilde{y}, \end{aligned}$$

wobei wir die Identität

$$\begin{aligned} 1 + h_x^2 + h_y^2 &= 1 + \left( -\frac{(\tilde{x} - x)}{h} \right)^2 + \left( -\frac{(\tilde{y} - y)}{h} \right)^2 \\ &= \frac{c^2 t^2}{h^2} = \frac{c^2 t^2}{c^2 t^2 - (\tilde{x} - x)^2 - (\tilde{y} - y)^2} \end{aligned}$$

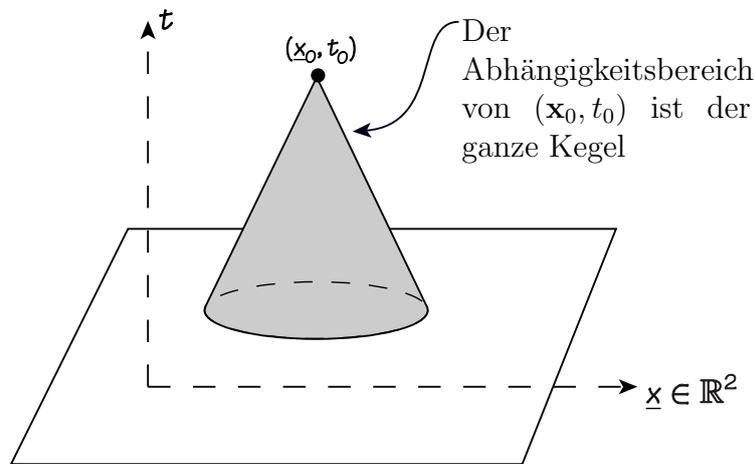
verwendet haben. Außerdem gilt

$$\int_{\partial B_{ct}(x,y,0)} f(\mathbf{y}) \, dS(\mathbf{y}) = 2ct \iint_{B_{ct}(x,y)} \frac{f(\tilde{x}, \tilde{y})}{(c^2t^2 - (\tilde{x} - x)^2 - (\tilde{y} - y)^2)^{1/2}} \, d\tilde{x} \, d\tilde{y},$$

und es folgt die Behauptung.  $\square$

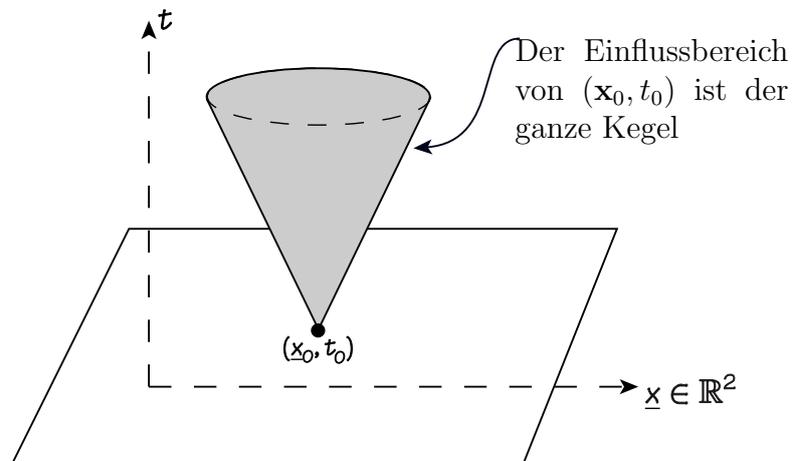
### Bemerkungen

1. Existenz und Eindeutigkeit folgen durch das übliche Argument.
2. Die Poissonsche Formel zeigt, dass der Abhängigkeitsbereich von  $(\mathbf{x}_0, t_0)$  der **ganze** nach unten gerichtete Kegel  $\{(\mathbf{x}, t) : |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| \leq c(t_0 - t), t < t_0\}$  ist.



Der Einflussbereich von  $(\mathbf{x}_0, t_0)$  ist der ganze entsprechende nach oben gerichteten Kegels, d.h.

$$\{(\mathbf{x}, t) : |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| \geq c(t - t_0), t > t_0\}.$$



Dieses Ergebnis ist **das Huygensche Prinzip** für die zweidimensionale Wellengleichung.

**Bemerkung**

*Frage:* Warum können wir die Methode der sphärischen Mittel nicht direkt auf die Wellengleichung im zweidimensionalen Raum anwenden? *Antwort:* Im zweidimensionalen Fall ist das sphärische Mittel

$$\bar{u}(x, y, r, t) = \frac{1}{2\pi r} \int_{B_r(x,y)} u(t, x, y) \, dx \, dy$$

zwar eine radialsymmetrische Lösung der Wellengleichung im zweidimensionalen Raum, d.h.

$$\bar{u}_{tt} = c^2 \left( \bar{u}_{rr} + \frac{1}{r} \bar{u}_r \right) \quad (\star)$$

für jedes  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ . Es existiert aber keine Substitution, die analog zur Substitution  $U = ru$  im dreidimensionalen Fall die Gleichung  $(\star)$  in eine andere Gleichung transformiert, die wir explizit lösen können.



# Kapitel 3

## Die Wärmeleitungsgleichung

### 3.1 Das Maximumsprinzip

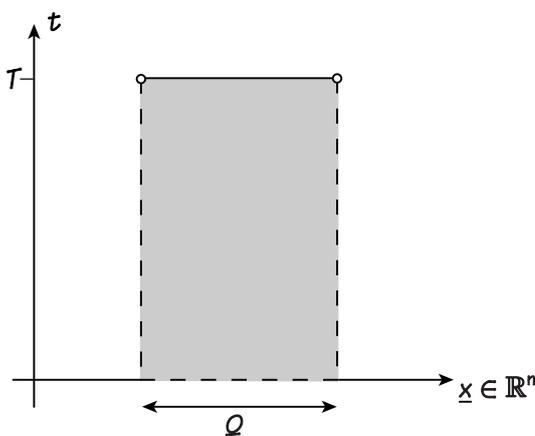
Es sei  $\Omega$  eine offene, beschränkte, zusammenhängende Teilmenge von  $\mathbb{R}^n$ . Für den Raum-Zeit-Zylinder

$$Q_T = \Omega \times (0, T].$$

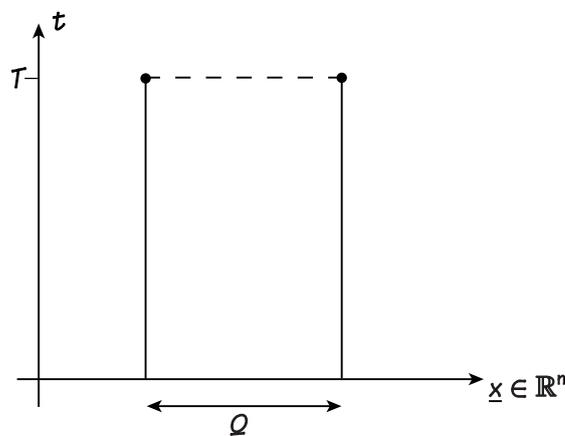
definieren wir den **parabolische Rand** von  $Q_T$  durch

$$\partial'Q_T := (\overline{\Omega} \times \{0\}) \cup (\partial\Omega \times [0, T]).$$

Insbesondere ist  $\partial'Q_T$  abgeschlossen.



$Q_T$  besteht aus dem Inneren und dem Deckel des Zylinders



$\partial'Q_T$  besteht aus dem Mantel und dem Boden des Zylinders

#### Satz (*Das schwache Maximumsprinzip*)

Die Funktion  $u \in C^2(Q_T) \cap C(\overline{Q_T})$  erfülle

$$u_t - \Delta u \leq 0 \quad \text{für alle } (\mathbf{x}, t) \in Q_T.$$

Dann gilt

$$\max_{(\mathbf{x}, t) \in \overline{Q_T}} u(\mathbf{x}, t) = \max_{(\mathbf{x}, t) \in \partial'Q_T} u(\mathbf{x}, t),$$

d.h. das Maximum von  $u$  über  $\overline{Q_T}$  wird in einem Punkt des parabolischen Randes von  $Q_T$  angenommen.

**Beweis**

(A) Wir behandeln zunächst den Sonderfall

$$u_t - \Delta u < 0, \quad (\mathbf{x}, t) \in Q_T.$$

Nehmen wir an,  $u$  nimmt sein Maximum über  $\overline{Q}_T$  in einem Punkt  $(\mathbf{x}_0, t_0) \notin \partial' Q_T$  an. Wegen  $\mathbf{x}_0 \in \Omega$ ,  $0 < t_0 \leq T$  folgt nun aus

$$\begin{aligned} \partial_{x_j} u(\mathbf{x}_0, t_0) &= 0, & j = 1, \dots, n & \quad (\mathbf{x}_0 \text{ ist kritischer Punkt von } u(\cdot, t_0)), \\ \partial_{x_j}^2 u(\mathbf{x}_0, t_0) &\leq 0, & j = 1, \dots, n & \quad (\mathbf{x}_0 \text{ ist ein lokales Maximum von } u(\cdot, t_0)) \end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned} \partial_t u(\mathbf{x}_0, t_0) &= 0, & \text{falls } t_0 < T & \quad (t_0 \text{ ist kritischer Punkt von } u(\mathbf{x}_0, \cdot)), \\ \partial_t u(\mathbf{x}_0, t_0) &\geq 0, & \text{falls } t_0 = T & \quad (t_0 \text{ ist ein lokales Maximum von } u(\mathbf{x}_0, \cdot)) \end{aligned}$$

↑  
*einseitige Ableitung*

Insgesamt gilt damit

$$u_t(\mathbf{x}_0, t_0) - \Delta u(\mathbf{x}_0, t_0) \geq 0,$$

was unserer Voraussetzung widerspricht.

(B) Um den allgemeinen Fall

$$u_t - \Delta u \leq 0, \quad (\mathbf{x}, t) \in Q_T$$

zu behandeln, definieren wir

$$v_\varepsilon(\mathbf{x}, t) = u(\mathbf{x}, t) - \varepsilon t.$$

Für jeden positiven Wert von  $\varepsilon$  gilt damit

$$v_t - \Delta v = u_t - \Delta u - \varepsilon < 0, \quad (\mathbf{x}, t) \in Q_T,$$

und Schritt (A) liefert

$$\max_{(\mathbf{x}, t) \in \overline{Q}_T} v_\varepsilon(\mathbf{x}, t) = \max_{(\mathbf{x}, t) \in \partial' Q_T} v_\varepsilon(\mathbf{x}, t). \quad (*)$$

Aufgrund der **gleichmäßigen Konvergenz**  $v_\varepsilon(\mathbf{x}, t) \rightarrow u(\mathbf{x}, t)$  in  $\overline{Q}_T$  für  $\varepsilon \rightarrow 0$ , gilt nun

$$\begin{aligned} \max_{(\mathbf{x}, t) \in \overline{Q}_T} v_\varepsilon(\mathbf{x}, t) &\xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \max_{(\mathbf{x}, t) \in \overline{Q}_T} u(\mathbf{x}, t), \\ \max_{(\mathbf{x}, t) \in \partial' Q_T} v_\varepsilon(\mathbf{x}, t) &\xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \max_{(\mathbf{x}, t) \in \partial' Q_T} u(\mathbf{x}, t), \end{aligned}$$

und mit (\*) folgt die Behauptung. □

**Korollar**

Mit den obigen Notationen gilt:

1.  $u_t - \Delta u \geq 0$  in  $Q_T \Rightarrow$  Das Minimum von  $u$  wird in einem Punkt von  $\partial'Q_T$  angenommen
2.  $u_t - \Delta u = 0$  in  $Q_T \Rightarrow$  Das Maximum und Minimum von  $u$  werden in Punkten von  $\partial'Q_T$  angenommen

**Lemma (Vergleichsprinzip für Lösungen)**

Seien  $u, v \in C^2(Q_T) \cap C(\overline{Q_T})$  zwei Funktionen mit

$$\begin{aligned} u_t - \Delta u &= f_1, & v_t - \Delta v &= f_2, & (\mathbf{x}, t) &\in Q_T, \\ u &= g_1, & v &= g_2, & (\mathbf{x}, t) &\in \partial'Q_T, \end{aligned}$$

wobei  $f_1, f_2 \in C(\overline{Q_T})$  und  $g_1, g_2 \in C(\partial'Q_T)$  gegeben sind. Dann gilt

$$u(\mathbf{x}, t) \leq v(\mathbf{x}, t)$$

für alle  $(\mathbf{x}, t) \in \overline{Q_T}$ .

**Beweis**

Die Funktion  $w = u - v$  erfüllt nach Voraussetzung

$$\begin{aligned} w_t - \Delta w &\leq 0, & (\mathbf{x}, t) &\in Q_T, \\ w &\leq 0, & (\mathbf{x}, t) &\in \partial'Q_T. \end{aligned}$$

Dem schwachen Maximumsprinzip zufolge gilt also

$$w(\mathbf{x}, t) \leq \max_{(\mathbf{x}, t) \in \overline{Q_T}} w(\mathbf{x}, t) = \max_{(\mathbf{x}, t) \in \partial'Q_T} w(\mathbf{x}, t) \leq 0$$

für alle  $(\mathbf{x}, t) \in \overline{Q_T}$ . □

**Lemma (Eindeutigkeit von Lösungen)**

Seien  $f \in C(\overline{Q_T})$ ,  $g \in \partial\Omega \times [0, T]$  und  $h \in C(\overline{\Omega})$  gegen mit  $g(\mathbf{x}, 0) = h(\mathbf{x})$  für alle  $\mathbf{x} \in \partial\Omega$ . Dann besitzt das Rand-Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} u_t - \Delta u &= f, & (\mathbf{x}, t) &\in Q_T, \\ u &= g, & (\mathbf{x}, t) &\in \partial\Omega \times (0, T], \\ u|_{t=0} &= h, & \mathbf{x} &\in \Omega, \end{aligned}$$

höchstens eine Lösung  $u \in C^2(Q_T) \cap C(\overline{Q_T})$ .

**Beweis**

Seien  $u_1$  und  $u_2$  zwei Lösungen des Rand-Anfangswertproblems, und sei  $u = u_2 - u_1$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} u_t - \Delta u &= 0, & (\mathbf{x}, t) &\in Q_T, \\ u &= 0, & (\mathbf{x}, t) &\in \partial' Q_T. \end{aligned}$$

Aus dem schwachen Maximums- bzw. Minimumsprinzip folgt nun

$$\begin{aligned} \max_{(\mathbf{x}, t) \in \overline{Q_T}} u(\mathbf{x}, t) &= \max_{(\mathbf{x}, t) \in \partial' Q_T} u(\mathbf{x}, t) = 0, \\ \min_{(\mathbf{x}, t) \in \overline{Q_T}} u(\mathbf{x}, t) &= \min_{(\mathbf{x}, t) \in \partial' Q_T} u(\mathbf{x}, t) = 0, \end{aligned}$$

so dass  $u(\mathbf{x}, t) = 0$  für alle  $(\mathbf{x}, t) \in \overline{Q_T}$  gilt.  $\square$

Das schwache Maximumsprinzip kann wie folgt verschärft werden (zum Beweis siehe Evans).

**Satz (Das starke Maximumsprinzip)**

Die Funktion  $u \in C^2(Q_T) \cap C(\overline{Q_T})$  erfülle

$$u_t - \Delta u \leq 0, \quad (\mathbf{x}, t) \in Q_T.$$

Dann ist  $u$  entweder konstant oder es gilt

$$u(\mathbf{x}, t) < \max_{(\mathbf{x}, t) \in \partial' Q_T} u(\mathbf{x}, t)$$

für alle  $(\mathbf{x}, t) \in Q_T$ .

**Bemerkung**

Es gilt das entsprechende starke Minimumsprinzip.

**Korollar (Positivität von Lösungen)**

Sei  $g \in C(\overline{\Omega})$  eine nicht-konstante Funktion mit  $g(\mathbf{x}) \geq 0$  für alle  $\mathbf{x} \in \overline{\Omega}$  und  $g(\mathbf{x}) = 0$  für  $x \in \partial\Omega$ . Außerdem sei  $u \in C^2(Q_T) \cap C(\overline{Q_T})$  eine Funktion mit

$$\begin{aligned} u_t &= \Delta u, & (\mathbf{x}, t) &\in Q_T, \\ u &= 0, & (\mathbf{x}, t) &\in \partial\Omega, \\ u|_{t=0} &= g, & \mathbf{x} &\in \Omega. \end{aligned}$$

Dann gilt  $u(\mathbf{x}, t) > 0$  für alle  $(\mathbf{x}, t) \in Q_T$ .

**Beweis**

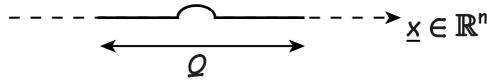
Zunächst bemerken wir, dass  $u$  nicht konstant sein kann, denn eine solche Konstante müßte Null sein, was der Voraussetzung an  $g$  widerspricht. Aus dem starken Minimumsprinzip folgt damit

$$u(\mathbf{x}, t) > \min_{(\mathbf{x}, t) \in \partial' Q_T} u(\mathbf{x}, t) = 0$$

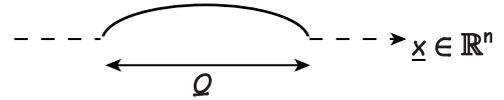
für alle  $(\mathbf{x}, t) \in Q_T$ .  $\square$

**Bemerkung**

Das obige Korollar besagt, dass Informationen sich mit unendlicher Geschwindigkeit ausbreiten:



Nehmen wir an,  $u(\mathbf{x}, 0)$  ist positiv auf einem kleinen offenen Intervall und verschwindet außerhalb. .



Es gilt  $u(\mathbf{x}, t) > 0$  für alle  $t > 0$  und  $\mathbf{x} \in \Omega$ . Die kleine anfängliche Störung des trivialen Zustandes hat den Wert von  $u$  in allen Punkten von  $\Omega$  sofort beeinflusst: Sie hat sich also mit unendlicher Geschwindigkeit ausgebreitet.

**3.2 Das Anfangswertproblem im  $\mathbb{R}^n$** 

In diesem Abschnitt betrachten wir die Wärmeleitungsgleichung

$$u_t = \Delta u, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, t > 0$$

mit Anfangsbedingung

$$u|_{t=0} = g, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n.$$

**Der Gaußsche Kern**

Wir beginnen mit einer besonderen Lösung der homogenen Gleichung

$$u_t = \Delta u, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, t > 0.$$

**Definition**

Die Funktion

$$K(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} e^{-|\mathbf{x}|^2/4t}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, t > 0$$

heißt der **Gaußsche Kern**.

**Lemma (Eigenschaften des Gaußschen Kerns)**

Der Gaußsche Kern hat die folgenden Eigenschaften.

1.  $K$  ist unendlich oft differenzierbar für  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, t > 0$ ;
2.  $K$  löst die Wärmeleitungsgleichung für  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, t > 0$ ;
3.  $K(\mathbf{x}, t) > 0$  für  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, t > 0$ ;
4.  $\int_{\mathbb{R}^n} K(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} = 1$  für  $t > 0$ ;
5. Für jedes  $\delta > 0$  gilt

$$\lim_{t \downarrow 0} \int_{|\mathbf{x}| \geq \delta} K(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} = 0.$$

**Beweis**

1. Aus der Formel für  $K(\mathbf{x}, t)$  ist ersichtlich, dass  $K$  unendlich oft differenzierbar für  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ ,  $t > 0$  ist.
2. Beachte, dass  $K(\mathbf{x}, t)$  eine radialsymmetrische Funktion ist:

$$K(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} e^{-r^2/4t}, \quad r = |\mathbf{x}|.$$

Aus der Formel

$$\Delta = \partial_r^2 + \frac{n-1}{r} \partial_r$$

für den Laplace-Operator für radialsymmetrische Funktionen in  $n$  Dimensionen finden wir, dass

$$K_t = \Delta K$$

für  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ ,  $t > 0$  ist.

3. Aus der Formel für  $K(\mathbf{x}, t)$  ist ersichtlich, dass  $K(\mathbf{x}, t) > 0$  für  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ ,  $t > 0$  ist.
4. Es gilt:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} K(\mathbf{x}, t) \, d\mathbf{x} &= \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|\mathbf{x}|^2/4t} \, d\mathbf{x} \\ &= \frac{1}{\pi^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|\mathbf{y}|^2} \, d\mathbf{y} \\ &= \frac{1}{\pi^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-y_1^2 - \dots - y_n^2} \, dy_1 \dots dy_n \\ &= \frac{1}{\pi^{n/2}} \left( \underbrace{\int_{\mathbb{R}} e^{-y^2} \, dy}_{= \sqrt{\pi}} \right)^n \\ &= 1 \end{aligned}$$

5. Es gilt:

$$\begin{aligned} \int_{|\mathbf{x}| \geq \delta} K(\mathbf{x}, t) \, d\mathbf{x} &= \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \int_{|\mathbf{x}| \geq \delta} e^{-|\mathbf{x}|^2/4t} \, d\mathbf{x} \\ &= \frac{1}{\pi^{n/2}} \int_{|\mathbf{y}| \geq \frac{\delta}{2\sqrt{t}}} e^{-|\mathbf{y}|^2} \, d\mathbf{y} \\ &\rightarrow 0 \end{aligned}$$

für  $t \rightarrow 0$ , wobei wir verwendet haben, dass

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{|\mathbf{x}| \geq R} f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = 0$$

für jede über  $\mathbb{R}^n$  integrierbare Funktion  $f$  gilt.

□

**Satz (Darstellungsformel für Lösungen)**

Sei  $g \in BC(\mathbb{R}^n)$  (d.h.  $g$  ist stetig und beschränkt) gegeben und sei  $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times (0, \infty)) \cap BC(\mathbb{R}^n \times [0, \infty))$  definiert durch

$$u(\mathbf{x}, t) = \int_{\mathbb{R}^n} K(\mathbf{x} - \mathbf{y}, t)g(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y},$$

wobei  $K(\mathbf{x}, t)$  der Gaußsche Kern ist. Dann löst  $u$  die Wärmeleitgleichung

$$u_t = \Delta u, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \, t > 0$$

mit Anfangsbedingung

$$u|_{t=0} = g, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n.$$

**Beweis**

Wir zeigen zunächst, dass  $u$  die Differentialgleichung für  $t > 0$  erfüllt. Aufgrund der Differenzierbarkeit von  $K$  und der Taylorschen Restglieddarstellung gilt nun für festes  $t > 0$  und alle  $\varepsilon < t/2$ ,  $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$  die Abschätzung

$$\begin{aligned} \left| \frac{K(\mathbf{z}, t + \varepsilon) - K(\mathbf{z}, t)}{\varepsilon} - K_t(\mathbf{z}, t) \right| &= \varepsilon |K_{tt}(\mathbf{z}, \tilde{t}(t, \varepsilon))| \\ &\leq \varepsilon \sup_{\frac{1}{2}t \leq \tilde{t} \leq \frac{3}{2}t} |K_{tt}(\mathbf{z}, \tilde{t})| \\ &\leq \varepsilon D(t)K(\mathbf{z}, 2t), \end{aligned}$$

wobei  $D(t)$  eine Konstante ist, die von  $t$  aber nicht von  $\mathbf{z}$  abhängt. Hierbei haben wir benutzt, dass

$$(1 + s^2 + s^4) \exp\left(-\frac{s^2}{4\tilde{t}}\right) \leq (1 + s^2 + s^4) \exp\left(-\frac{s^2}{6t}\right) \leq C \exp\left(-\frac{s^2}{8t}\right)$$

für alle  $s \in \mathbb{R}$  und eine geeignete Konstante  $C$  gilt. Wir schließen nun

$$\begin{aligned} \left| \frac{u(\mathbf{x}, t + \varepsilon) - u(\mathbf{x}, t)}{\varepsilon} - \int_{\mathbb{R}^n} K_t(\mathbf{x} - \mathbf{y}, t)g(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y} \right| \\ \leq \varepsilon D(t) \int_{\mathbb{R}^n} K(\mathbf{x} - \mathbf{y}, 2t) |g(\mathbf{y})| \, d\mathbf{y} \leq \varepsilon D(t)M \end{aligned}$$

wobei

$$M = \sup_{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n} |g(\mathbf{y})|.$$

Damit haben wir gezeigt, dass

$$u_t(\mathbf{x}, t) = \int_{\mathbb{R}^n} K_t(\mathbf{x} - \mathbf{y}, t)g(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y}$$

gilt, und analog zeigt man

$$\Delta u(\mathbf{x}, t) = \int_{\mathbb{R}^n} (\Delta K)(\mathbf{x} - \mathbf{y}, t)g(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y},$$

wobei sich  $\Delta$  auf die Ableitungen bzgl.  $\mathbf{x}$  bezieht. Insgesamt folgt damit  $u_t - \Delta u = 0$  aus  $K_t - \Delta K = 0$ .

Es bleibt zu zeigen, dass  $u$  die Anfangsbedingung erfüllt. Dazu zeigen wir nun Stetigkeit von  $u$  in jedem Punkte  $(\mathbf{z}, 0)$  mit  $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$ , d.h.

$$\lim_{\substack{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{z} \\ t \downarrow 0}} u(\mathbf{x}, t) = g(\mathbf{z}).$$

Insbesondere wollen wir zeigen, dass es zu jedem  $\varepsilon > 0$  Zahlen  $\delta > 0$  und  $\Delta > 0$  existieren, so dass

$$|\mathbf{x} - \mathbf{z}| < \delta, 0 \leq t < \Delta \quad \Rightarrow \quad |u(\mathbf{x}, t) - g(\mathbf{z})| < \varepsilon.$$

Für gegebene  $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$  und  $\varepsilon > 0$  wählen wir nun  $\delta, \Delta > 0$  wie folgt:

1. Da  $g$  stetig in  $\mathbf{z}$  ist, existiert  $\delta = \delta(z) > 0$ , so dass

$$|\mathbf{y} - \mathbf{z}| < 2\delta \quad \Rightarrow \quad |g(\mathbf{y}) - g(\mathbf{z})| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

2. Da  $\lim_{t \downarrow 0} \int_{|\mathbf{x}-\mathbf{y}| \geq \delta} K(\mathbf{x} - \mathbf{y}, t) \, d\mathbf{y} = 0$ , existiert  $\Delta = \Delta(z, \delta) > 0$ , so dass

$$0 \leq t < \Delta \quad \Rightarrow \quad \int_{|\mathbf{x}-\mathbf{y}| \geq \delta} K(\mathbf{x} - \mathbf{y}, t) \, d\mathbf{y} < \frac{\varepsilon}{4M}.$$

Für  $|\mathbf{x} - \mathbf{z}| < \delta, t < \Delta$  gilt nun

$$\begin{aligned} & |u(\mathbf{x}, t) - g(\mathbf{z})| \\ &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} K(\mathbf{x} - \mathbf{y}, t) g(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y} - g(\mathbf{z}) \right| \\ &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} K(\mathbf{x} - \mathbf{y}, t) g(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y} - \underbrace{\int_{\mathbb{R}^n} K(\mathbf{x} - \mathbf{y}, t) \, d\mathbf{y}}_{=1} g(\mathbf{z}) \right| \\ &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} K(\mathbf{x} - \mathbf{y}, t) (g(\mathbf{y}) - g(\mathbf{z})) \, d\mathbf{y} \right| \\ &\leq \left| \int_{|\mathbf{x}-\mathbf{y}| \geq \delta} K(\mathbf{x} - \mathbf{y}, t) (g(\mathbf{y}) - g(\mathbf{z})) \, d\mathbf{y} \right| + \left| \int_{|\mathbf{x}-\mathbf{y}| < \delta} K(\mathbf{x} - \mathbf{y}, t) (g(\mathbf{y}) - g(\mathbf{z})) \, d\mathbf{y} \right| \\ &\leq 2M \int_{|\mathbf{x}-\mathbf{y}| \geq \delta} K(\mathbf{x} - \mathbf{y}, t) \, d\mathbf{y} + \sup_{|\mathbf{x}-\mathbf{y}| < \delta} |g(\mathbf{y}) - g(\mathbf{z})| \underbrace{\int_{|\mathbf{x}-\mathbf{y}| < \delta} K(\mathbf{x} - \mathbf{y}, t) \, d\mathbf{y}}_{\leq 1} \\ &\leq 2M \int_{|\mathbf{x}-\mathbf{y}| \geq \delta} K(\mathbf{x} - \mathbf{y}, t) \, d\mathbf{y} + \sup_{|\mathbf{x}-\mathbf{z}| < 2\delta} |g(\mathbf{y}) - g(\mathbf{z})| \\ &\quad \text{(denn } |\mathbf{x} - \mathbf{y}| < \delta, |\mathbf{x} - \mathbf{z}| < \delta \Rightarrow |\mathbf{y} - \mathbf{z}| < 2\delta) \\ &\leq 2M \frac{\varepsilon}{4M} + \frac{\varepsilon}{2} \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

und der Beweis ist beendet. □

**Bemerkung**

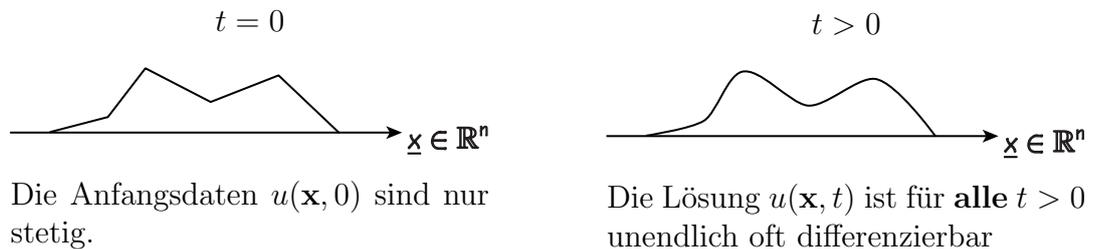
Die Funktion

$$u(\mathbf{x}, t) = \int_{\mathbb{R}^n} K(\mathbf{x} - \mathbf{y}, t) g(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y}$$

ist unendlich oft differenzierbar für  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ ,  $t > 0$ , denn wir können beliebig oft unter dem Integral differenzieren. Genauer gesagt, es gilt

$$\partial_{x_1}^{\alpha_1} \dots \partial_{x_n}^{\alpha_n} \partial_t^\beta u(\mathbf{x}, t) = \int_{\mathbb{R}^n} \left( \partial_{x_1}^{\alpha_1} \dots \partial_{x_n}^{\alpha_n} \partial_t^\beta K(\mathbf{x} - \mathbf{y}, t) \right) g(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y}.$$

Insbesondere schließen wir, dass die Anfangsdaten **sofort geglättet** werden.

**Notation**

1. Die Kombination

$$u(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^n} u_1(\mathbf{x} - \mathbf{y}) u_2(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y}$$

zweier Funktionen  $u_1$  und  $u_2$  heißt **Faltung** von  $u_1$  und  $u_2$  und wird oft als  $u_1 * u_2$  geschrieben.

Die Lösung der Wärmeleitgleichung im  $n$ -dimensionalen Raum ist also die Faltung des Gaußschen Kerns mit dem Anfangswert  $g$ .

2. Die skalare Funktion

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-s^2} \, ds$$

heißt **Gaußsche Fehlerfunktion** und besitzt die folgenden Eigenschaften:

- $\operatorname{erf}(0) = 0$ ;
- $\operatorname{erf}(x) \rightarrow 1$  für  $x \rightarrow \infty$ ;
- $\operatorname{erf}'(x) > 0$  für alle  $x > 0$ ;
- $K(x, t) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{2} \operatorname{erf} \left( \frac{x}{\sqrt{4t}} \right) \right)$ .

Üblicherweise existiert keine explizite Formel für die Lösung der Wärmeleitgleichung im  $n$ -dimensionalen Raum. Es gibt aber Anfangswerte  $g$ , für die  $K * g$  durch die Fehlerfunktion ausgedrückt werden kann.

**Satz (Eindeutigkeit von Lösungen)**

Für gegebenes  $g \in BC(\mathbb{R}^n)$  gilt:

1. Es existiert eine **eindeutige** Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{aligned} u_t &= \Delta u, & \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, t > 0, \\ u|_{t=0} &= g, & \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \end{aligned}$$

aus der Klasse aller Funktionen  $u \in C^2(\mathbb{R}^n \times [0, \infty)) \cap C(\mathbb{R}^n \times [0, \infty))$ , die polynomial in der Zeit wachsen.

2. Diese eindeutige Lösung  $u$  ist  $u = K * g$ , wobei  $K$  der Gaußsche Kern ist.

Dabei heißt  $u$  polynomial wachsend in der Zeit, falls es zwei Konstanten  $M$  und  $N$  gibt, so dass

$$|u(\mathbf{x}, t)| \leq M(1 + t^N)$$

für alle  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  und  $t \geq 0$  gilt.

**Beweis**

(*Existenz*) Wir wissen schon, dass  $u = K * g$  das Anfangswertproblem löst. Diese Lösung ist außerdem beschränkt, da

$$\begin{aligned} |u(\mathbf{x}, t)| &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} K(\mathbf{x} - \mathbf{y}, t) g(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y} \right| \\ &\leq \sup_{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n} |g(\mathbf{y})| \underbrace{\int_{\mathbb{R}^n} K(\mathbf{x} - \mathbf{y}, t) \, d\mathbf{y}}_{= 1} \end{aligned}$$

gilt, und dsamit auch polynomial wachsend in der Zeit.

(*Eindeutigkeit*) Seien nun  $u_1$  und  $u_2$  zwei polynomial wachsende Lösungen. Die Differenz  $w = u_1 - u_2$  löst dann das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} w_t &= \Delta w, & \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, t > 0, \\ w|_{t=0} &= 0, & \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

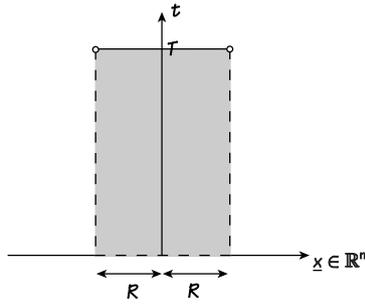
und ist auch polynomial wachsend in der Zeit, d.h. es gilt

$$|w(\mathbf{x}, t)| \leq M(1 + t^N)$$

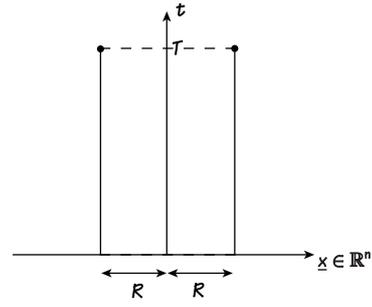
für geeignet gewählte Konstanten  $M$  und  $N$ . Für gegebenes  $R > 0$  und  $T > 0$  betrachten wir nun die Menge

$$Q_{R,T} = \{(\mathbf{x}, t) : |\mathbf{x}| < R, t \in (0, T]\}$$

sowie den dazugehörigen parabolischen Rand  $\partial'Q_{R,T}$ .



$Q_{R,T}$  besteht aus dem Inneren und dem Deckel des Zylinders.



$\partial'Q_{R,T}$  besteht aus Mantel und Boden des Zylinders.

Wir wollen nun zeigen, dass

$$|w(\mathbf{x}, t)| \leq \varepsilon, \quad (\mathbf{x}, t) \in \overline{Q}_{R,T} \quad (*)$$

für beliebig gewählte  $R > 0$ ,  $T > 0$ , und  $\varepsilon > 0$  gilt, denn dies impliziert  $w(\mathbf{x}, t) = 0$  für alle  $x \in \mathbb{R}^n$  und  $t \geq 0$  aufgrund der Beliebigkeit von  $R$ ,  $T$  und  $\varepsilon$ .

Seien nun  $R > 0$ ,  $T > 0$ ,  $\varepsilon > 0$  gegeben. Wir betrachten die Funktion

$$v_\mu(\mathbf{x}, t) = \frac{\mu}{\left(1 - \frac{t}{2T}\right)^{n/2}} \exp\left(\frac{|\mathbf{x}|^2}{8T\left(1 - \frac{t}{2T}\right)}\right)$$

und wählen  $\mu = \mu(R, T, \varepsilon) > 0$ , so dass

$$v_\mu(\mathbf{x}, t) \leq \varepsilon, \quad (\mathbf{x}, t) \in \overline{Q}_{R,T}.$$

Eine einfache Berechnung liefert

$$\partial_t v_\mu = \Delta v_\mu, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \quad t \in (0, T]$$

sowie

$$v_\mu(\mathbf{x}, 0) \geq 0 = w(\mathbf{x}, 0).$$

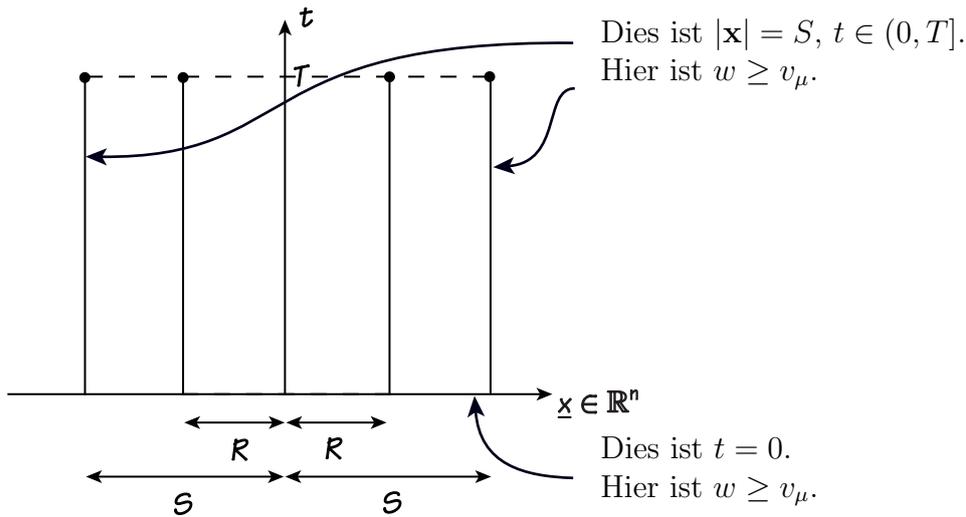
Für  $\mathbf{x}$  mit  $|\mathbf{x}| = S$  und  $t \in (0, T]$  gilt nun

$$\begin{aligned} v_\mu(\mathbf{x}, t) &= \frac{\mu}{\left(1 - \frac{t}{2T}\right)^{n/2}} \exp\left(\frac{S^2}{8T\left(1 - \frac{t}{2T}\right)}\right) \\ &\geq \mu \exp\left(\frac{S^2}{8T}\right) \geq M(1 + T^N) \geq M(1 + t^N) \end{aligned}$$

für alle hinreichend große Werte von  $S = S(R, T, \varepsilon)$ . Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir  $S > R$  annehmen, und deshalb gilt

$$v_\mu(\mathbf{x}, t) \geq M(1 + t^N) \geq w(\mathbf{x}, t)$$

für  $|\mathbf{x}| = S$ .



Es gilt also

$$w(\mathbf{x}, t) \leq v_\mu(\mathbf{x}, t), \quad (\mathbf{x}, t) \in \partial' Q_{S,T}$$

und aus dem Vergleichsprinzip auf dem beschränkten Gebiet  $B_S(0)$  folgt

$$w(\mathbf{x}, t) \leq v_\mu(\mathbf{x}, t), \quad (\mathbf{x}, t) \in \bar{Q}_{S,T}.$$

Dies impliziert

$$w(\mathbf{x}, t) \leq v_\mu(\mathbf{x}, t) \leq \varepsilon, \quad (\mathbf{x}, t) \in \bar{Q}_{R,T},$$

da  $\bar{Q}_{R,T} \subset \bar{Q}_{S,T}$  ist. Wir wiederholen nun dieses Argument mit  $-w$  an Stelle von  $w$ , und haben damit insgesamt (\*) gezeigt.  $\square$

### Bemerkung

1. Für die *physikalisch richtige* Lösung  $u = K * g$  gilt offensichtlich

$$c_- \leq g(\mathbf{x}) \leq c_+ \quad \forall \mathbf{x} \quad \implies \quad c_- \leq u(\mathbf{x}, t) \leq c_+ \quad \forall \mathbf{x}, t \geq 0$$

Außerdem kann man zeigen, dass

$$\int_{\mathbb{R}^n} (\partial_{x_i}^m g(\mathbf{x}))^2 d\mathbf{x} < \infty \quad \implies \quad \int_{\mathbb{R}^n} (\partial_{x_i}^m u(\mathbf{x}, t))^2 d\mathbf{x} < \infty \quad \forall t > 0$$

für alle  $i = 1 \dots n$  und  $m \in \mathbb{N}$  gilt.

2. Es gibt in der Tat unendlich viele weitere Lösungen des Anfangswertproblems im  $\mathbb{R}^n$ . Diese sind aber unphysikalisch und wachsen (im Betrag) sehr schnell für  $|\mathbf{x}| \rightarrow \infty$  und sind nicht polynomial wachsend in der Zeit.

# Kapitel 4

## Die Laplace- und die Poisson-Gleichung

### 4.1 Distributionen

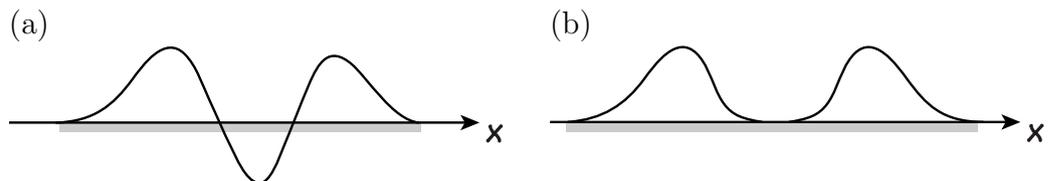
#### Eindimensionale Distributionen

##### Definition (*Testfunktionen*)

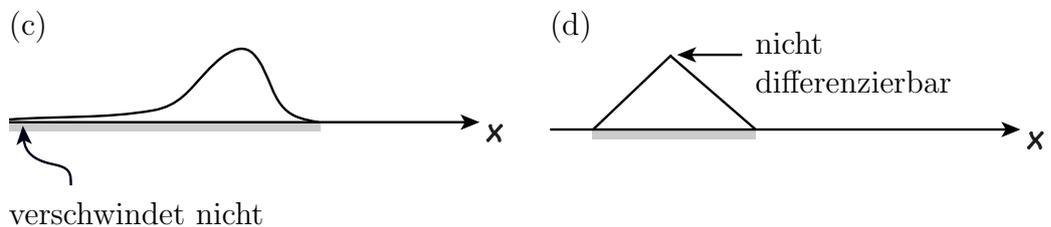
1. Eine (reelle) **Testfunktion** ist eine reellwertige, unendlich oft differenzierbare Funktion, die außerhalb eines beschränkten Intervalls verschwindet. Insbesondere ist der Träger von  $\phi$ , d.h.

$$\text{supp } \phi := \overline{\{x \in \mathbb{R} : \phi(x) \neq 0\}},$$

kompakt.



(a) und (b) sind Testfunktionen



(c) und (d) sind keine Testfunktionen

Die markierte Region ist der **Träger** der jeweiligen Funktion, d.h. das kleinste abgeschlossene Intervall, außerhalb dessen die Funktion verschwindet. Wir bezeichnen den Träger einer Funktion  $\phi$  mit  $\text{supp } \phi$ .

2. Wir bezeichnen die Menge aller Testfunktionen mit  $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ .
3. Eine Folge  $\{\phi_n\}$  von Testfunktionen **konvergiert** gegen die Testfunktion  $\phi$ , falls
  - (a) es ein **beschränktes** Intervall  $I$  gilt, so dass  $\text{supp } \phi_n \subset I$  für alle  $n$  und  $\text{supp } \phi \in I$ ,
  - (b) *alle* Ableitungen von  $\phi_n$  gegen die entsprechenden Ableitungen von  $\phi$  gleichmäßig auf  $I$  konvergieren, d.h.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in I} |\phi_n^{(m)}(x) - \phi^{(m)}(x)| = 0$  für alle  $m \in \mathbb{N}$ .

### Definition (*Distributionen*)

Eine (reelle) **Distribution**  $f$  ist eine lineare und stetige Abbildung  $\mathcal{D}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ , wobei wir  $(f, \phi)$  statt  $f(\phi)$  schreiben.

- **Linearität:**

$$(f, \alpha\phi_1 + \beta\phi_2) = \alpha(f, \phi_1) + \beta(f, \phi_2)$$

für alle Testfunktionen  $\phi_1, \phi_2$  und alle reellen Zahlen  $\alpha, \beta$ ;

- **Stetigkeit:**

$$\phi_n \rightarrow \phi \Rightarrow (f, \phi_n) \rightarrow (f, \phi)$$

Wir bezeichnen die Menge der Distributionen mit  $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ .

### Beispiele

1. Eine beliebige beschränkte Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definiert eine Distribution

$$(f, \phi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\phi(x) dx.$$

2. Die **Diracsche "Delta-Funktion"** im Punkt  $a \in \mathbb{R}$  ist die durch die Formel

$$(\delta_a, \phi) := \phi(a)$$

definierte Distribution. Wir wollen  $\delta_a$  die **Dirac-Distribution** im Punkte  $a$  nennen; ist  $a = 0$ , so schreiben wir oftmals  $\delta$  statt  $\delta_0$ .

### Definition (*Ableitungen von Distributionen*)

Die **Ableitung** einer Distribution  $f$  ist die durch die Formel

$$(f', \phi) := -(f, \phi')$$

definierte Distribution. Höhere Ableitungen werden rekursiv definiert, so dass die Distribution  $f^{(n)}$  durch die Formel

$$(f^{(n)}, \phi) = (-1)^n (f, \phi^{(n)})$$

definiert ist.

**Bemerkung**

Alle Distributionen sind unendlich oft differenzierbar.

**Beispiele**

1. Es sei  $f \in BC^1(\mathbb{R})$ . Dann definieren  $f$  und die gewöhnliche Ableitung  $f'$  die Distributionen

$$\begin{aligned}(f, \phi) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\phi(x) \, dx, \\ (f', \phi) &= \int_{-\infty}^{\infty} f'(x)\phi(x) \, dx.\end{aligned}$$

Definitionsgemäß ist die Ableitung der Distribution  $(f, \cdot)$  die durch die Formel

$$\begin{aligned}(f', \phi) &:= - \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\phi'(x) \, dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f'(x)\phi(x) \, dx \quad (\text{partielle Integration})\end{aligned}$$

definierte Distribution  $(f', \cdot)$ , so dass die zwei Definitionen von  $f'$  miteinander übereinstimmen.

2. Betrachte die **Heaviside-Funktion**

$$H(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0, \end{cases}$$

die die Distribution

$$\begin{aligned}(H, \phi) &= \int_{-\infty}^{\infty} H(x)\phi(x) \, dx \\ &= \int_0^{\infty} \phi(x) \, dx\end{aligned}$$

definiert. Die Rechnung

$$\begin{aligned}(H', \phi) &= -(H, \phi') \\ &= - \int_0^{\infty} \phi'(x) \, dx \\ &= \phi(0) \\ &= (\delta, \phi)\end{aligned}$$

zeigt, dass die Ableitung von  $H$  im Sinne der Distributionen die Diracsche Delta-Funktion ist.

3. Die  $k$ -te Ableitung der Dirac-Distribution ist durch

$$(\delta_a^{(k)}, \phi) = (-1)^k \phi^{(k)}(a)$$

gegeben.

**Notation**

Es sei  $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  eine Abbildung und  $f$  eine Distribution. Es gelte

$$(f, \phi) = \int_{-\infty}^{\infty} h(x)\phi(x) dx$$

für alle Testfunktionen  $\phi$ , deren Träger in dem *offenen* Intervall  $I$  liegt. Dann schreiben wir

$$f = h(x) \quad \text{für } x \in I.$$

**Beispiel**

Es gilt

$$\delta = 0 \quad \text{für } -\infty < x < 0 \quad \text{und} \quad \delta = 0 \quad \text{für } 0 < x < \infty,$$

aufgrund von  $(\delta, \phi) = \phi(0) = 0$  für alle  $\phi$  mit  $0 \notin \text{supp}\phi$ .

**Definition (Konvergenz von Distributionen)**

Eine Folge  $\{f_n\}$  von Distributionen **konvergiert** gegen eine Distribution  $f$ , falls

$$(f_n, \phi) \rightarrow (f, \phi) \quad \text{für } n \rightarrow \infty$$

für alle Testfunktionen  $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ .

**Bemerkung**

Differenzieren im Sinne der Distributionen ist eine lineare und stetige Operation, wobei Stetigkeit sich (nur) auf Konvergenz im Sinne von Distributionen bezieht.

**Beispiele**

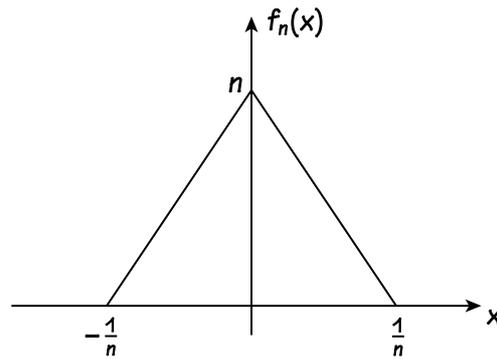
1. Es sei  $\{f_n\}$  eine Folge stetiger Funktionen, die gegen eine stetige Funktion  $f$  gleichmäßig konvergiert. Dann gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_n(x)\phi(x) dx \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\phi(x) dx \quad \text{für } n \rightarrow \infty$$

für alle Testfunktionen  $\phi$ . Die Folge der durch die Funktionen  $f_n$  definierten Distributionen konvergiert also gegen die durch die Funktion  $f$  definierte Distribution.

2. Die Funktionenfolge  $\{f_n\}$  sei definiert durch

$$f_n(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -\frac{1}{n}, \\ n^2x + n, & -\frac{1}{n} \leq x \leq 0, \\ -n^2x + n, & 0 \leq x \leq \frac{1}{n}, \\ 0, & x \geq \frac{1}{n}, \end{cases}$$



Dann gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_n(x) dx = \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} f_n(x) dx = 1$$

sowie  $f_n \rightarrow \delta_0$  im Sinne der Distributionen, denn wir haben

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f_n(x)\phi(x) dx - (\delta_0, \phi) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_n(x)\phi(x) dx - \phi(0) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f_n(x)\phi(x) dx - \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} f_n(x) dx}_{=1} \phi(0) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f_n(x)(\phi(x) - \phi(0)) dx \end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned} \left| \int_{-\infty}^{\infty} f_n(x)(\phi(x) - \phi(0)) dx \right| &\leq \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} f_n(x)|\phi(x) - \phi(0)| dx \\ &\leq \sup_{x \in [-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}]} |\phi(x) - \phi(0)| \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} f_n(x) dx \\ &= \sup_{x \in [-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}]} |\phi(x) - \phi(0)| \rightarrow 0 \end{aligned}$$

für  $n \rightarrow \infty$ , weil  $\phi$  stetig im Nullpunkt ist.

### Bemerkung

Komplexwertige Testfunktionen und Distributionen werden analog zu reellwertigen Distributionen definiert. Wir schreiben dann manchmal  $\mathcal{D}(\mathbb{R}; \mathbb{C})$  bzw.  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}; \mathbb{C})$ , oftmals aber wieder  $\mathcal{D}(\mathbb{R})$  bzw.  $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ .

### Definition (*Temperierte Distributionen*)

1. Eine **Schwartzfunktion**  $\phi$  ist eine unendlich oft differenzierbare, reell- oder komplexwertige Funktionen mit der Eigenschaft, dass

$$|x|^k |\phi^{(m)}(x)|$$

für alle  $k, m = 0, 1, 2, \dots$  beschränkt ist.

Die Menge aller Schwartzfunktionen heißt **Schwartz-Raum** und wird mit  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$  bezeichnet.

2. Wir sagen, eine Folge  $\{\phi_n\} \subset \mathcal{S}(\mathbb{R})$  konvergiert gegen  $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ , sofern

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |x|^k |\phi_n^{(m)}(x) - \phi^{(m)}(x)| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

für alle  $k, m = 0, 1, 2, \dots$  gilt.

3. Eine **temperierte Distribution**  $f$  ist eine lineare, stetige Abbildung  $\mathcal{S}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$  oder  $\mathcal{S}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{C}$ . Wir bezeichnen das Bild der Schwartzfunktion  $\phi$  unter der temperierten Distribution  $f$  mit  $(f, \phi)$ .

4. Konvergenz und Abbildungen temperierter Distributionen werden analog zu diesen Begriffen für gewöhnliche Distributionen definiert.

### Bemerkungen

1. Wichtige Beispiele für temperierte Distributionen sind

- die Distributionen

$$(f, \phi) := \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\phi(x) dx,$$

die durch beschränkte Funktionen  $f$  definiert sind;

- die Diracsche Delta-Funktion

$$(\delta_a, \phi) := \phi(a).$$

2. Jede temperierte Distribution ist auch eine gewöhnliche Distribution, denn  $\mathcal{D}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R})$ .

3. Es sei  $\phi$  eine Schwartzfunktion und  $p$  ein Polynom. Dann sind  $\phi^{(n)}$ ,  $n = 1, 2, \dots$  sowie  $p\phi$  ebenfalls Schwartzfunktionen.

4. Sei  $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$  eine Schwartz-Funktion. Dann gilt

$$\int_{\mathbb{R}} |x^k \phi^{(m)}(x)| dx < \infty$$

für alle  $k, m = 0, 1, 2, \dots$

Der Hauptvorteil von temperierten Distributionen gegenüber gewöhnlichen Distributionen ist, dass man ihre Fourier-Transformierten definieren kann.

**Lemma**

Es sei  $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ . Dann sind die Fourier-Transformierte

$$\hat{\phi}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) e^{ikx} dx$$

und inverse Fourier-Transformierte

$$\check{\phi}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(k) e^{-ikx} dk$$

von  $\phi$  ebenfalls Schwartzfunktionen.

**Beweis**

Die Formel

$$\hat{g}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(x) e^{ikx} dx$$

zeigt, dass die Fourier-Transformierte  $\hat{g}$  einer integrierbaren Funktion  $g$  stetig und beschränkt ist. Dies gilt insbesondere für Schwartzfunktionen.

Es sei  $\phi$  eine Schwartzfunktion. Aus den Formeln

$$\begin{aligned} \hat{\phi}^{(n)}(k) &= \mathcal{F}[(ix)^n \phi(x)], \\ (ik)^m \hat{\phi}(k) &= \mathcal{F}[\phi^{(m)}(x)] \end{aligned}$$

folgt

$$(ik)^m \hat{\phi}^{(n)}(k) = \mathcal{F} \left[ \underbrace{\frac{d^m}{dx^m} \left( (ix)^n \phi(x) \right)}_{\text{Schwartzfunktion}} \right], \quad m, n = 0, 1, 2, \dots$$

Dies ist eine Schwartzfunktion und ist daher integrierbar

Mit  $m = 0$  zeigt diese Formel, dass  $\hat{\phi}^{(n)}$  für  $n = 1, 2, \dots$  existiert, so dass  $\hat{\phi}$  unendlich oft differenzierbar ist. Ferner zeigt sie, dass

$$|k|^m |\hat{\phi}(k)|$$

für alle  $m, n = 0, 1, 2, \dots$  beschränkt ist.

Dasselbe Argument liefert das Ergebnis für  $\check{\phi}$ . □

**Definition (Fourier-Transformation für temperierte Distributionen)**

Es sei  $f$  eine temperierte Distribution. Die **Fourier-Transformierte**  $\hat{f}$  von  $f$  ist die durch die Formel

$$(\hat{f}, \phi) = (f, \hat{\phi})$$

definierte temperierte Distribution.

## Beispiele

1. Es sei  $f$  eine integrierbare Funktion, so dass  $\hat{f}$  im klassischen Sinne existiert und eine stetige, beschränkte Funktion definiert. Wir können also entsprechende temperierte Distributionen durch die üblichen Formel

$$\begin{aligned}(f, \phi) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\phi(x) dx, \\ (\hat{f}, \phi) &= \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(x)\phi(x) dx\end{aligned}$$

definieren.

Definitionsgemäß ist die Fourier-Transformierte der temperierten Distribution  $(f, \cdot)$  die durch die Formel

$$\begin{aligned}(\hat{f}, \phi) &:= (f, \hat{\phi}) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(k)\hat{\phi}(k) dk \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(k) \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x)e^{ikx} dx dk \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(k)e^{ikx} dk \phi(x) dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(x)\phi(x) dx\end{aligned}$$

definierte Distribution  $(\hat{f}, \cdot)$ . Die zwei Definitionen von  $\hat{f}$  stimmen also miteinander überein.

2. Es gilt

$$\begin{aligned}(\hat{\delta}, \phi) &= (\delta, \hat{\phi}) = \hat{\phi}(0) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(k)e^{ikx} dk \Big|_{x=0} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(k) dk \\ &= \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \phi \right).\end{aligned}$$

Das ist die durch die konstante Funktion  $1/\sqrt{2\pi}$  definierte temperierte Distribution

Es ist also

$$\hat{\delta} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

im Sinne der Distributionen.

## Distributionen in höheren Dimensionen

Die Definitionen von (temperierten) Distributionen lassen sich leicht auf höhere Dimensionen verallgemeinern.

**Definitionen**

1. Eine **Testfunktion**  $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$  ist eine unendlich oft differenzierbare Funktion, die außerhalb einer hinreichend großen im Ursprung zentrierten Kugel verschwindet. Die Menge aller Testfunktionen wird mit  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  bezeichnet.
2. Eine **Schwartzfunktion**  $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$  ist eine unendlich oft differenzierbare Funktionen mit der Eigenschaft, dass

$$|x|^k |\partial_{x_1}^{m_1} \dots \partial_{x_n}^{m_n} \phi(x)|$$

für alle  $k, m_1, \dots, m_n = 0, 1, 2, \dots$  beschränkt ist. Die Menge aller Schwartzfunktionen wird mit  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  bezeichnet.

3. Konvergenz von Test- und Schwartz-Funktionen wird analog zu  $n = 1$  definiert.
4. Eine  **$n$ -dimensionale Distribution** ist eine lineare, stetige Abbildung  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{C}$ . Die Menge aller  $n$ -dimensionalen Distributionen wird mit  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$  bezeichnet.
5. Eine  **$n$ -dimensionale temperierte Distribution** ist eine lineare, stetige Abbildung  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{C}$ . Die Menge aller  $n$ -dimensionalen temperierten Distributionen wird mit  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  bezeichnet.

Alles Weitere wird ebenfalls analog zum eindimensionalen Fall eingeführt:

- Eine lokal integrierbare Funktion  $f(\mathbf{x})$  wird mit einer  $n$ -dimensionalen Distribution durch die Formel

$$(f, \phi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{x}) \phi(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}$$

identifiziert.

- Die partiellen Ableitungen einer  $n$ -dimensionalen Distribution  $f$  werden durch die Formel

$$(\partial_{x_1}^{m_1} \dots \partial_{x_n}^{m_n} f, \phi) := (-1)^{m_1 + \dots + m_n} (f, \partial_{x_1}^{m_1} \dots \partial_{x_n}^{m_n} \phi), \quad m_1, \dots, m_n = 0, 1, 2, \dots$$

definiert.

- Die Fourier-Transformierte einer  $n$ -dimensionalen temperierten Distribution  $f$  wird durch die Formel

$$(\hat{f}, \phi) := (f, \hat{\phi})$$

definiert, wobei die Fourier-Transformierte

$$\hat{\phi}(\mathbf{k}) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \phi(\mathbf{x}) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \, d\mathbf{x}$$

und inverse Fourier-Transformierte

$$\hat{\phi}(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \phi(\mathbf{k}) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \, d\mathbf{k}$$

einer Schwartzfunktion  $\phi$  ebenfalls Schwartzfunktionen sind.

- Die  $n$ -dimensionale Delta-Distribution im Punkt  $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$  wird durch die Formel

$$(\delta_{\mathbf{a}}, \phi) := \phi(\mathbf{a})$$

definiert.

**Definition (Träger von Distributionen)**

Der Träger einer Distributionen  $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$  wird mit  $\text{supp } f$  bezeichnet und ist die **kleinste abgeschlossene Menge** mit der Eigenschaft

$$\text{supp } \phi \subset \mathbb{R}^n \setminus \text{supp } f \implies (f, \phi) = 0.$$

Insbesondere gilt  $f = 0$  auf  $\mathbb{R}^n \setminus \text{supp } f$ .

**Bemerkung**

Es gilt

1.  $\text{supp } \delta_{\mathbf{a}} = \{\mathbf{a}\}$ ,
2.  $\text{supp } \partial_{x_k} f \subset \text{supp } f$ ,
3. Für jede lokal integrierbare Funktion sind distributioneller Träger und klassischer Träger identisch.

**Definition (Delta-Distribution auf Sphären)**

Es seien  $\mathbf{a}_0$  ein konstanter  $n$ -dimensionaler Vektor und  $r$  ein positiver Radius. Die Durch die Formel

$$(\delta_{\partial B_r(\mathbf{a})}, \phi) = \underbrace{\int_{\partial B_r(\mathbf{a})} \phi(\mathbf{x}) \, dS(\mathbf{x})}_{\text{Integral von } \phi \text{ über die Sphäre von Radius } r \text{ um } \mathbf{a}}$$

wird eine Distribution mit Träger auf  $\partial B_r(\mathbf{a})$  definiert. Oftmals schreibt man auch  $\delta_{|\mathbf{x}-\mathbf{a}|-r}$  statt  $\delta_{\partial B_r(\mathbf{a})}$ .

Analog kann man  $\delta_M$  für jede hinreichend reguläre Hyperfläche  $M \subset \mathbb{R}^n$  definieren.

**Definition (Direktes Produkt)**

Es seien  $f(\mathbf{x}) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^p)$  bzw.  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^p)$  und  $g(\mathbf{y}) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^q)$  bzw.  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^q)$ . Das **direkte Produkt**  $f(\mathbf{x})g(\mathbf{y})$  ist die durch die Formel

$$(f(\mathbf{x})g(\mathbf{y}), \phi(\mathbf{x}, \mathbf{y})) = (f(\mathbf{x}), (g(\mathbf{y}), \phi(\mathbf{x}, \mathbf{y})))$$

definierte  $(p+q)$ -dimensionale (temperierte) Distribution.

Mit anderen Worten: Man darf Distributionen, die von verschiedenen Koordinaten abhängen, miteinander multiplizieren.

**Beispiele**

1. Es seien  $f(\mathbf{x})$  und  $g(\mathbf{y})$  lokal integrierbare Funktionen. Dann gilt

$$\begin{aligned} (f(\mathbf{x})g(\mathbf{y}), \phi(\mathbf{x}, \mathbf{y})) &= \int_{\mathbb{R}^p} f(\mathbf{x}) \int_{\mathbb{R}^q} g(\mathbf{y}) \phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \, d\mathbf{y} \, d\mathbf{x} \\ &= \int_{\mathbb{R}^{p+q}} f(\mathbf{x})g(\mathbf{y}) \phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \, d(\mathbf{x}, \mathbf{y}). \end{aligned}$$

2. Es seien  $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^p$ ,  $\mathbf{y}_0 \in \mathbb{R}^q$  konstante Vektoren. Dann gilt

$$(\delta_{\mathbf{x}_0} \delta_{\mathbf{y}_0}, \phi(\mathbf{x}, \mathbf{y})) = (\delta_{\mathbf{x}_0}, \phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}_0)) = \phi(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) = (\delta_{(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)}, \phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}))$$

**Definition (Weitere Operationen für Distributionen)**

1. Für  $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$  und  $m \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$  ist das **Produkt**  $mf$  die durch die Formel

$$(mf, \phi) := (f, m\phi)$$

definierte  $n$ -dimensionale (temperierte) Distribution.

(Im Falle, dass  $f$  eine lokal integrierbare Funktion ist, zeigt die Rechnung

$$(mf, \phi) = \int_{\mathbb{R}^n} (m(\mathbf{x})f(\mathbf{x}))\phi(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{x})(m(\mathbf{x})\phi(\mathbf{x})) \, d\mathbf{x} = (f, m\phi),$$

dass diese Definition mit der üblichen Definition von Multiplikation übereinstimmt.)

2. Das Produkt  $mf$  ist auch für  $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  definiert, sofern  $m \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$  die Eigenschaft hat, dass  $m\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  für alle  $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  gilt.
3. Es seien  $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$  bzw.  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  und  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ . Die **Koordinatenverschiebung**  $\tau_{\mathbf{y}}f$  wird durch die Formel

$$(\tau_{\mathbf{y}}f, \phi) = (f, \tau_{-\mathbf{y}}\phi)$$

definiert.

(Im Falle, dass  $f$  eine lokal integrierbare Funktion ist, zeigt die Rechnung

$$(\tau_{\mathbf{y}}f, \phi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{x} + \mathbf{y})\phi(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{z})\phi(\mathbf{z} - \mathbf{y}) \, d\mathbf{z} = (f, \tau_{-\mathbf{y}}\phi),$$

dass diese Definition mit der üblichen Definition von Koordinatenverschiebung übereinstimmt.)

4. Es seien  $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$  bzw.  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  und  $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  bzw.  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ . Die **Faltung**  $f * \phi$  ist die durch die Formel

$$(f * \phi)(\mathbf{x}_0) = (f, \phi(\mathbf{x}_0 - \cdot))$$

definierte Funktion  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ .

(Im Falle, dass  $f$  eine lokal integrierbare Funktion ist, zeigt die Rechnung

$$(f * \phi)(\mathbf{x}_0) = \int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{x}_0 - \mathbf{x})\phi(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{y})\phi(\mathbf{x}_0 - \mathbf{y}) \, d\mathbf{y} = (f, \phi(\mathbf{x}_0 - \cdot)),$$

dass diese Definition mit der üblichen Definition von Faltung übereinstimmt.)

**Bemerkung (*Distributionen auf beschränkten und zylindrischen Gebieten*)**

- Wir können Distributionen (aber nicht temperierte Distributionen) auf einem **beschränkten und offenen** Menge  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  definieren. In diesem Fall ist  $\mathcal{D}(\Omega)$  die Menge aller  $C^\infty$ -Funktionen, deren Träger Teilmenge von  $\Omega$  ist.
- In einem Zylindergebiet  $\mathbb{R}^p \times \Omega$ , wobei  $\Omega \subset \mathbb{R}^q$  ein beschränktes, offenes Gebiet ist, können wir Distributionen einführen, die nur in den ersten  $p$  Richtungen temperiert sind. Dazu betrachten wir unendlich oft differenzierbare Testfunktionen  $\phi(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ ,  $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbb{R}^p \times \Omega$  mit den folgenden Eigenschaften:
  - Es gibt eine kompakte Teilmenge  $K \subset \Omega$ , so dass  $\phi$  verschwindet in der Nähe in  $\mathbb{R}^p \times (\Omega \setminus K)$ ;
  - Es gilt

$$\sup_{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbb{R}^p \times \Omega} |\mathbf{x}|^\alpha |\partial_{x_1}^{m_1} \dots \partial_{x_p}^{m_p} \partial_{y_1}^{n_1} \dots \partial_{y_q}^{n_q} \phi(\mathbf{x}, \mathbf{y})| < \infty$$

für alle  $\alpha, m_1, \dots, m_p, n_1, \dots, n_q = 0, 1, 2, \dots$

## 4.2 Fundamentallösungen

**Definition (*Harmonische Funktion*)**

Sei  $\Omega$  eine offene Teilmenge des  $\mathbb{R}^n$ . Eine Funktion  $u \in C^2(\Omega)$  heißt **harmonisch**, falls  $(\Delta u_F)(\mathbf{x}) = 0$  für alle  $\mathbf{x} \in \Omega$  gilt.

**Bemerkung**

Man kann zeigen, dass jede harmonische Funktion unendlich oft differenzierbar ist.

**Definition (*Fundamentallösung*)**

Eine **Fundamentallösung** der Laplace-Gleichung

$$\Delta u = 0$$

im  $n$ -dimensionalen Raum ist eine Funktion  $u_F : \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\} \rightarrow \mathbb{R}$ , die

- harmonisch in  $\mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$  ist,
- die Gleichung

$$\Delta u_F = \delta_{\mathbf{0}}$$

im Sinne der Distributionen auf ganz  $\mathbb{R}^n$  löst.

**Bemerkungen**

1. Die zweite Bedingung impliziert eigentlich schon die erste, da  $\delta = 0$  auf  $\mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$  gilt.
2. Die Funktion  $u_F$  ist nicht eindeutig bestimmt: Die Summe  $u_F + u_H$ , wobei  $u_H$  eine im ganzen Raum harmonische Funktion ist, ist ebenfalls eine Fundamentallösung für die Laplace-Gleichung.
3. Die zweite Bedingung besagt, dass

$$\int_{\mathbb{R}^n} u_F(\mathbf{x}) \Delta \phi(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \phi(\mathbf{0})$$

für alle Testfunktionen  $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  ist. Um diese Bedingung erfüllen zu können, muss  $u_F$  eine Singularität im Nullpunkt haben.

**Beispiel**

Finden Sie eine Fundamentallösung für die Laplace-Gleichung im dreidimensionalen Raum.

**Lösung**

Wir suchen zunächst eine radialsymmetrische Lösung  $u = u(r)$  der Laplace-Gleichung  $\Delta u = 0$  auf  $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ . Die Funktion  $u$  muss dann die gewöhnliche Differentialgleichung

$$u'' + \frac{2}{r}u'(r) = 0,$$

lösen, d.h. es gilt

$$u(r) = c_1 + \frac{c_2}{r}$$

für irgendwelche Konstante  $c_1$  und  $c_2$  ist. Da konstante Funktionen harmonisch auf  $\mathbb{R}^3$  sind, setzen wir  $c_1$ .

Im zweiten Schritt wollen wir  $c_2$  so bestimmen, dass

$$\Delta \left( \frac{c_2}{r} \right) = \delta_{\mathbf{0}}$$

gilt. Sei dazu  $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$  eine beliebige Testfunktion, und  $M$  hinreichend groß, so dass  $\text{supp } \phi \subset B_M(\mathbf{0})$  ist. Dann gilt

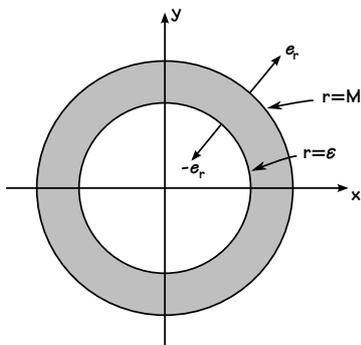
$$\int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{r} \Delta \phi \, d\mathbf{x} = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{\varepsilon \leq r \leq M} \frac{1}{r} \Delta \phi \, d\mathbf{x},$$

und aus dem zweiten Greenschen Integralsatz folgt

$$\int_{\varepsilon \leq r \leq M} \left( \frac{1}{r} \Delta \phi - \underbrace{\phi \Delta \left( \frac{1}{r} \right)}_{=0} \right) d\mathbf{x} = \int_{\partial\{\varepsilon \leq r \leq M\}} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial n} - \phi \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{r} \right) \right) dS(\mathbf{x}),$$

wobei  $n$  die äußere Einheitsnormale zum Rand des Gebiets  $\{\varepsilon \leq r \leq M\}$  ist. Dieser Rand  $\partial\{\varepsilon \leq r \leq M\}$  besteht aus den zwei Teilen  $\{r = \varepsilon\}$  und  $\{r = M\}$ . Auf  $\{r = M\}$  verschwindet  $\phi$  mit sämtlichen Ableitungen, so dass die Randintegrale ebenfalls verschwinden, und auf  $\{r = \varepsilon\}$  gilt  $\partial_n = -\partial_r$ . Es gilt also

$$\int_{\varepsilon \leq r \leq M} \frac{1}{r} \Delta \phi \, d\mathbf{x} = - \int_{r=\varepsilon} \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} \, dS(\mathbf{x}) + \int_{r=\varepsilon} \phi \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \right) \, dS(\mathbf{x}).$$



- Die äußere Einheitsnormale an  $\{r = M\}$  ist  $\mathbf{e}_r$ , so dass  $\partial_n = \partial_r$  dort.
- Die äußere Einheitsnormale an  $\{r = \varepsilon\}$  ist  $-\mathbf{e}_r$ , so dass  $\partial_n = -\partial_r$  dort.

Wir wollen nun den Limes  $\varepsilon \rightarrow 0$  der Randterme für  $r = \varepsilon$  betrachten. Wegen  $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$  gilt

$$\left| \int_{r=\varepsilon} \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} \, dS(\mathbf{x}) \right| \leq 4\pi\varepsilon^2 \frac{1}{\varepsilon} \sup \left| \frac{\partial \phi}{\partial r} \right| \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0$$

sowie

$$\int_{r=\varepsilon} \phi \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \right) \, dS(\mathbf{x}) = -\frac{1}{\varepsilon^2} \int_{r=\varepsilon} \phi \, dS(\mathbf{x}) = -4\pi \bar{\phi}_\varepsilon \rightarrow -4\pi \phi(\mathbf{0})$$

für  $\varepsilon \rightarrow 0$ , wobei

$$\bar{\phi}_\varepsilon = \frac{1}{4\pi\varepsilon^2} \int_{r=\varepsilon} \phi \, dS(\mathbf{x})$$

der Mittelwert von  $\phi$  über  $\partial B_\varepsilon(\mathbf{0})$  ist.

Wir haben nun gezeigt, dass

$$\int_{\mathbb{R}^3} \frac{c_2}{r} \phi \, d\mathbf{x} = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{\varepsilon \leq r \leq M} \frac{c_2}{r} \Delta \phi \, dS(\mathbf{x}) = -4\pi c_2 \phi(\mathbf{0}),$$

und daher wählen wir  $c_2 = -1/4\pi$ . Insbesondere ist die Funktion  $u_F : \mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{0}\}$  mit

$$u_F(\mathbf{x}) = -\frac{1}{4\pi|\mathbf{x}|}$$

ist eine Fundamentallösung der Laplace-Gleichung im  $\mathbb{R}^3$ . □

**Satz (Existenz- und Darstellungssatz für das Poissonproblem auf  $\mathbb{R}^n$ )**

Für alle hinreichend regulären Funktionen  $f$  ist durch  $u = u_F * f$ , d.h.

$$u(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^n} u_F(\mathbf{x} - \mathbf{y}) f(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y} \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$$

eine Lösung des Poissonproblems  $\Delta u = f$  auf  $\mathbb{R}^n$  gegeben, wobei  $u_F$  eine Fundamentallösung der Laplace-Gleichung im  $\mathbb{R}^n$  ist.

### Beweis

Der rigorose Beweis kann im Rahmen dieses Skripts nicht gegeben werden, beruht aber auf der (formalen) Identität:

$$\Delta(u_F * f) = (\Delta u_F) * f = \delta_0 * f = f$$

□

### Bemerkung

Der obige Darstellungssatz liefert Existenz aber keine Eindeutigkeit von Lösungen. Es ist aber klar, dass die Differenz von zwei Lösungen harmonisch sein muss.

Um einen Spezialfall des Existenzresultates für  $n = 3$  zu beweisen, leiten wir zunächst ein Hilfsresultat ab.

### Lemma (*Darstellungsgleichung für glatte Funktionen mit kompaktem Träger*)

Für jede Funktion  $u \in C_0^2(\mathbb{R}^3)$  gilt

$$u(\mathbf{x}) = - \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \Delta_{\mathbf{y}} u(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y}.$$

### Beweis

Es seien  $(r, \theta, \phi)$  im Punkt  $\mathbf{x}$  zentrierte Polarkoordinaten. Wir wählen  $M$  hinreichend groß, so dass  $\text{supp } u \subset B_M(\mathbf{x})$ . Dann gilt nach dem Greenschen Integralsatz

$$\begin{aligned} & - \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \Delta_{\mathbf{y}} u(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y} \\ &= \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{B_M(\mathbf{x}) \setminus B_\varepsilon(\mathbf{x})} \frac{1}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \Delta_{\mathbf{y}} u(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y} - \\ &= \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \left[ - \int_{\varepsilon \leq r \leq M} \underbrace{u(\mathbf{y}) \Delta_{\mathbf{y}} \left( \frac{1}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \right)}_{=0} \, d\mathbf{y} + \int_{r=\varepsilon} \frac{1}{4\pi r} \frac{\partial u}{\partial r}(\mathbf{y}) \, dS(\mathbf{y}) - \int_{r=\varepsilon} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{4\pi r} \right) u(\mathbf{y}) \, dS(\mathbf{y}) \right] \end{aligned}$$

Der Limes der Randintegrale kann wir folgt berechnet werden. Aufgrund von  $u \in C^2$  gilt

$$\left| \int_{r=\varepsilon} \frac{1}{4\pi r} \frac{\partial u}{\partial r}(\mathbf{y}) \, dS(\mathbf{y}) \right| \leq 4\pi\varepsilon^2 \frac{1}{4\pi\varepsilon} \left( \sup_{\mathbf{y} \in \partial B_\varepsilon(\mathbf{x})} \left| \frac{\partial u}{\partial r}(\mathbf{y}) \right| \right) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0,$$

sowie

$$\int_{r=\varepsilon} u(\mathbf{y}) \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{4\pi r} \right) \, dS(\mathbf{y}) = - \frac{1}{4\pi\varepsilon^2} \int_{r=\varepsilon} u(\mathbf{y}) \, dS(\mathbf{y}) = -\bar{u}_\varepsilon \rightarrow -u(\mathbf{x}),$$

wobei

$$\bar{u}_\varepsilon = \frac{1}{4\pi\varepsilon^2} \int_{r=\varepsilon} u(\mathbf{y}) \, dS(\mathbf{y})$$

der Mittelwert von  $u$  über  $\partial B_\varepsilon(\mathbf{x})$  ist. □

### Bemerkung

Der obige Darstellungssatz ist auch gültig, sofern  $u$  (und die Ableitungen) hinreichend schnell für  $|x| \rightarrow \infty$  abklingen.

Wir können nun für  $n = 3$  einen Spezialfall des allgemeinen Darstellungssatzes beweisen.

### Satz (*Spezialfall des Existenz- und Darstellungssatzes*)

Für  $f \in C_0^2(\mathbb{R}^3)$  sei die Funktion  $u : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  definiert durch

$$u(\mathbf{x}) = - \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} f(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y}.$$

Dann gilt  $u \in C^2(\mathbb{R}^3)$ , wobei  $u$  die Poisson-Gleichung

$$\Delta u = f, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$$

erfüllt .

### Beweis

Es gilt

$$\int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} f(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y} = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{4\pi|\mathbf{s}|} f(\mathbf{x} - \mathbf{s}) \, d\mathbf{s}$$

und die Regularitätsvoraussetzungen an  $f$  implizieren

$$\begin{aligned} \partial_{x_1}^{j_1} \partial_{x_2}^{j_2} \partial_{x_3}^{j_3} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} f(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y} &= \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{4\pi|\mathbf{s}|} \partial_{x_1}^{j_1} \partial_{x_2}^{j_2} \partial_{x_3}^{j_3} f(\mathbf{x} - \mathbf{s}) \, d\mathbf{s} \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \partial_{y_1}^{j_1} \partial_{y_2}^{j_2} \partial_{y_3}^{j_3} f(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y} \end{aligned}$$

für  $j_1 + j_2 + j_3 = 1, 2$ . Insbesondere ist  $u \in C^2(\mathbb{R}^3)$  mit

$$\Delta u = - \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \Delta_{\mathbf{y}} f(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y}.$$

Die Behauptung folgt nun aus der Darstellungsformel

$$f(\mathbf{x}) = - \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \Delta_{\mathbf{y}} f(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y}.$$

□

**Bemerkung**

Die Lösung  $u$  aus dem obigen Existenzsatz klingt für  $|\mathbf{x}| \rightarrow \infty$  ab. Um dies zu sehen, wählen wir  $M > 0$  so dass  $\text{supp} f \subset B_M(0)$ . Für  $|\mathbf{x}| > 2M$  gilt nun

$$|u(\mathbf{x})| \leq \left| \int_{B_M(0)} \frac{f(\mathbf{y})}{4\pi |\mathbf{x} - \mathbf{y}|} d\mathbf{y} \right| \leq (\sup f) M^2 \left( \sup_{|\mathbf{y}|=M} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \right) \leq \frac{C_f}{|\mathbf{x}|}.$$

Es kann nun gezeigt werden, dass  $u$  die einzige **abklingende Lösung** des Poissonproblems ist. Dies folgt aus der Tatsache, dass jede abklingende harmonische Funktionen auf  $\mathbb{R}^n$  identisch Null sein muss.

**4.3 Greensche Funktionen**

Im folgenden sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  ein Gebiet (d.h.  $\Omega$  ist offen und zusammenhängend) mit (hinreichend glattem) Rand  $\partial\Omega$ . Für gegebene Funktionen  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  und  $h \in C(\partial\Omega)$  betrachten wir das entsprechende Dirichletsche Poissonproblem, d.h. wir suchen eine Funktion  $u : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$  so dass

$$\begin{aligned} \Delta u &= f & \text{in } \Omega, \\ u &= h & \text{auf } \partial\Omega. \end{aligned} \tag{P}$$

**Definition**

Eine **Greensche Funktion** für (P) ist eine Funktion

$$G : (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in (\bar{\Omega} \times \Omega) \setminus \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) : \mathbf{x} = \mathbf{y}\} \mapsto G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \rightarrow \mathbb{R}$$

so dass für alle  $\mathbf{y} \in \Omega$  gilt:

- $G(\cdot, \mathbf{y})$  ist stetig in  $\bar{\Omega} \setminus \{\mathbf{y}\}$ ,
- $G(\cdot, \mathbf{y})$  ist harmonisch in  $\Omega \setminus \{\mathbf{y}\}$ ,
- $G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$  für alle  $\mathbf{x} \in \partial\Omega$ ,
- die Funktion  $\mathbf{x} \in \Omega \rightarrow G(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  erfüllt

$$\Delta_{\mathbf{x}} G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \delta_{\mathbf{y}} \quad \text{in } \mathcal{D}'(\Omega).$$

Greensche Funktionen spielen dieselbe Rolle für Probleme in einem Gebiet mit Rand wie Fundamentallösungen für Probleme im  $\mathbb{R}^n$ . In diesem Abschnitt verwenden wir formale Argumente, um die Theorie der Greenschen Funktionen abzuleiten. Alle Argumente können aber rigoros begründet werden, sofern  $f$ ,  $g$  und  $\partial\Omega$  hinreichend regulär sind.

Für die folgenden formalen Betrachtungen ist es sinnvoll,  $\delta$  formal als eine Funktion zu betrachten, so dass

$$\int_{\Omega} \delta_{\mathbf{y}}(\mathbf{x}) \phi(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \phi(\mathbf{y})$$

für alle hinreichend regulären Funktionen  $\phi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  gilt.

**Satz (*Allgemeiner Darstellungssatz*)**

Die Lösung des Dirichletschen Problem (P) ist für alle hinreichend regulären Funktionen  $f$  and  $h$  durch die Formel

$$u(\mathbf{y}) = \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial G}{\partial n_{\mathbf{x}}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}$$

gegeben.

**Formaler Beweis**

Für festes  $\mathbf{y} \in \Omega$  betrachten wir die Gleichungen

$$\Delta u = f, \tag{1}$$

$$\Delta g = \delta_{\mathbf{y}}, \tag{2}$$

wobei  $g(\mathbf{x}) = G(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ . Wir multiplizieren nun (1) mit  $g$  und (2) mit  $u$ , und integrieren die Differenz über  $\Omega$ . Dies ergibt

$$\begin{aligned} \underbrace{\int_{\Omega} \left( g(\mathbf{x}) \Delta_{\mathbf{x}} u(\mathbf{x}) - u(\mathbf{x}) \Delta_{\mathbf{x}} g(\mathbf{x}) \right) \, d\mathbf{x}}_{\substack{= \int_{\partial\Omega} \left( g \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial g}{\partial n} \right) (\mathbf{x}) \, dS(\mathbf{x}) \\ \text{(zweiter Greenscher Integralsatz)}}} &= \int_{\Omega} \left( g(\mathbf{x}) f(\mathbf{x}) - \delta_{\mathbf{y}}(\mathbf{x}) u(\mathbf{x}) \right) \, d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

Mit  $g = 0$  und  $u = h$  auf  $\partial\Omega$  folgt damit

$$u(\mathbf{y}) = \int_{\Omega} \delta_{\mathbf{y}}(\mathbf{x}) u(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial G}{\partial n_{\mathbf{x}}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) h(\mathbf{x}) \, dS(\mathbf{x}).$$

□

**Satz (*Existenz und Eigenschaften von Greenschen Funktionen*)**

Die Greensche Funktion  $G(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  für (P) ist eindeutig bestimmt und symmetrisch, d.h. es gilt

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = G(\mathbf{y}, \mathbf{x})$$

für alle  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \Omega$ .

**Formaler Beweis**

- Es seien  $G_1, G_2$  zwei Greensche Funktionen für (P) und  $\mathbf{y} \in \Omega$  gegeben. Dann erfüllt  $g := G_1(\cdot, \mathbf{y}) - G_2(\cdot, \mathbf{y})$  die Gleichungen

$$g = 0 \quad \text{in} \quad \Omega, \quad g = 0 \quad \text{auf} \quad \partial\Omega.$$

da die Dirac-Distributionen im Punkt  $\mathbf{y}$  sich gegenseitig aufheben. Die einzige Lösung dieses Randwertproblems ist aber  $g = 0$  (siehe die Theorie der harmonischen Funktionen).

- Für gegebene  $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2 \in \Omega$  definieren wir  $u_1(\mathbf{x}) = G(\mathbf{x}, \mathbf{y}_1)$  sowie  $u_2(\mathbf{x}) = G(\mathbf{x}, \mathbf{y}_2)$ . Dann gilt

$$u_1 = 0 \quad \text{auf} \quad \partial\Omega, \quad \Delta u_1 = \delta_{\mathbf{y}_i} \quad \text{in} \quad \Omega.$$

Aus dem zweiten Greenschen Integralsatz folgt nun

$$\int_{\Omega} \left( u_1 \Delta u_2 - u_2 \Delta u_1 \right) (\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \int_{\partial\Omega} \left( u_1 \frac{\partial u_2}{\partial n} - u_2 \frac{\partial u_1}{\partial n} \right) (\mathbf{x}) \, dS(\mathbf{x})$$

und daher

$$0 = \int_{\Omega} \left( u_1 \Delta u_2 - u_2 \Delta u_1 \right) (\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = u_1(\mathbf{y}_2) - u_2(\mathbf{y}_1) = G(\mathbf{y}_2, \mathbf{y}_1) - G(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2).$$

□

### Beispiel

Finden Sie die Greensche Funktion für das Gebiet  $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$  und geben Sie die allgemeine Lösung  $u$  des Randwertproblems (P) an.

### Lösung

Wir suchen eine Funktion  $G(x, y; \xi, \eta)$  definiert auf

$$D := \{(x, y, \xi, \eta) \in \mathbb{R}^4 : y \geq 0, \xi > 0, (x, y) \neq (\xi, \eta)\},$$

so dass für alle festhaltenen  $(\xi, \eta) \in \Omega$  gilt

- $(x, y) \mapsto G(x, y; \xi, \eta)$  ist stetig in allen Punkten  $(x, y) \in \bar{\Omega} \neq (\xi, \eta)$ ,
- $G(x, 0; \xi, \eta) = 0$  für alle  $x \in \mathbb{R}$ ,
- $G_{xx}(x, y; \xi, \eta) + G_{yy}(x, y; \xi, \eta) = 0$  für alle  $(x, y) \in \Omega \neq (\xi, \eta)$ ,
- es gilt

$$\int_{\Omega} G(x, y; \xi, \eta) (\phi_{xx}(x, y) + \phi_{yy}(x, y)) \, dx \, dy = \phi(\eta, \xi)$$

für alle  $\phi \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$  mit kompaktem Träger in  $\Omega$ .

In den Übungen wurde gezeigt, dass  $\frac{1}{2\pi} \log |(x, y)|$  eine Fundamentallösung im  $\mathbb{R}^2$  ist. Wir definieren nun zwei Funktionen  $G_1, G_2$  auf der Menge  $\{(x, y, \xi, \eta) \in \mathbb{R}^4 : (x, y) \neq (\xi, \eta)\}$  durch

$$G_1(x, y; \xi, \eta) := \frac{1}{2\pi} \log |(x, y) - (\xi, \eta)| \quad G_2(x, y; \xi, \eta) := \frac{1}{2\pi} \log |(x, y) - (\xi, -\eta)|.$$

Für jedes feste  $(\xi, \eta) \in \mathbb{R}^2$  gilt nun:

- die Funktion  $(x, y) \mapsto G_1(x, y; \xi, \eta)$  ist harmonisch in  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(\xi, \eta)\}$  und erfüllt

$$\Delta_{(x,y)} G_1(x, y; \xi, \eta) := \delta_{(\xi, \eta)}(x, y) \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

in Sinne der Distributionen auf  $\mathbb{R}^2$ ,

- die Funktion  $(x, y) \mapsto G_2(x, y; \xi, -\eta)$  ist harmonisch in  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(\xi, \eta)\}$  und erfüllt

$$\Delta_{(x,y)} G_2(x, y; \xi, \eta) := \delta_{(\xi, -\eta)}(x, y) \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

in Sinne der Distributionen auf  $\mathbb{R}^2$ ,

- es gilt  $G_1(x, y; \xi, \eta) = G_2(x, -y; \xi, \eta)$  für alle  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ .

Wir definieren nun eine Funktion  $G$  durch

$$\begin{aligned} G(x, y; \xi, \eta) &= G_1(x, y; \xi, \eta) - G_2(x, y; \xi, \eta) \\ &= \frac{1}{4\pi} \log \left[ \frac{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}{(x - \xi)^2 + (y + \eta)^2} \right]. \end{aligned}$$

Dann gilt für jedes  $(\xi, \eta) \in \mathbb{R}^2$ :

- $(x, y) \mapsto G(x, y; \xi, \eta)$  ist harmonisch in  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(\xi, \eta), (\xi, -\eta)\}$  und erfüllt

$$\Delta_{(x,y)} G(x, y; \xi, \eta) := \delta_{(\xi, \eta)}(x, y) - \delta_{(\xi, -\eta)}(x, y) \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

in Sinne der Distributionen auf  $\mathbb{R}^2$ ,

- $G(x, 0; \xi, \eta) = G_1(x, 0; \xi, \eta) - G_2(x, 0; \xi, \eta)$  für alle  $x \in \mathbb{R}$ .

Insbesondere ist die Einschränkung von  $G$  auf die Menge  $D$  die gesuchte Greensche Funktion. Die Lösung des Randwertproblems (P) ist damit

$$\begin{aligned} u(\xi, \eta) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} G(x, y; \xi, \eta) f(x, y) dy dx - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial G}{\partial y}(x, 0; \xi, \eta) h(x) dx \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \log \left[ \frac{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}{(x - \xi)^2 + (y + \eta)^2} \right] f(x, y) dy dx \\ &\quad + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\eta}{(x - \xi)^2 + \eta^2} g(x) dx, \end{aligned}$$

denn auf  $\{y = 0\}$  gilt  $\partial_n = -\partial_y$ . □

### Bemerkung

Greensche Funktionen sind für spezielle Gebiete  $\Omega$  explizit bekannt. Auf allgemeinen Gebieten können sie aber approximativ berechnet werden.

## 4.4 Harmonische Funktionen

### 4.4.1 Die Poissonsche Formel auf der Kreisscheibe

Wir wollen nun zeigen, dass die eindeutige Lösung des Randwertproblems

$$\Delta u = 0 \quad \text{auf} \quad B_a(\mathbf{0}) \subset \mathbb{R}^n, \quad (1)$$

$$u = g \quad \text{auf} \quad \partial B_a(\mathbf{0}) \subset \mathbb{R}^n \quad (2)$$

durch die **Poissonsche Formel**

$$u(\mathbf{x}) = \frac{a^2 - |\mathbf{x}|^2}{an\omega_n} \int_{|\mathbf{y}|=a} \frac{g(\mathbf{y})}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^n} dS(\mathbf{y}) \quad (3)$$

gegeben ist, wobei  $\omega_n$  das Maß der Einheitskugel in  $\mathbb{R}^n$  ist. Dazu zeigen wir zunächst, dass (3) in der Tat eine Lösung für (1)-(2) liefert. Die Eindeutigkeit folgt dann sowohl aus dem Abschnitt über Greensche Funktionen als auch aus dem Maximum-Prinzip.

#### Lemma

Es gilt

$$\Delta_{\mathbf{x}} \left( \frac{a^2 - |\mathbf{x}|^2}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^n} \right) = 0$$

für  $|\mathbf{x}| < a$  und  $|\mathbf{y}| = a$ .

#### Beweis

Durch Nachrechnen verifizieren wir

$$\begin{aligned} \Delta \left( \frac{a^2 - |\mathbf{x}|^2}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^n} \right) &= \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^n} \Delta (a^2 - |\mathbf{x}|^2) + (a^2 - |\mathbf{x}|^2) \Delta \left( \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^n} \right) \\ &\quad + 2\nabla (a^2 - |\mathbf{x}|^2) \cdot \nabla \left( \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^n} \right). \end{aligned}$$

Die Terme auf der rechten Seite lässt können nun wie folgt ausgewertet werden:

- Mit  $r = |\mathbf{x}|$  gilt

$$\Delta (a^2 - |\mathbf{x}|^2) = \frac{d^2}{dr^2} (a^2 - r^2) + \frac{n-1}{r} \frac{d}{dr} (a^2 - r^2) = -2n$$

und

$$\nabla (a^2 - |\mathbf{x}|^2) = \frac{d}{dr} (a^2 - r^2) \nabla r = -2\mathbf{x},$$

denn

$$\nabla (|\mathbf{x}|) = \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|}.$$

- Mit  $R = |\mathbf{x} - \mathbf{y}|$  gilt

$$\Delta(|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^{-n}) = \frac{d^2}{dR^2}(R^{-n}) + \frac{n-1}{R} \frac{d}{dR}(R^{-n}) = 2nR^{-n-2} = 2n|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^{-n-2}$$

und

$$\nabla(R^{-n}) = \frac{d}{dR}(R^{-n})\nabla R = -nR^{-n-2}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = -n|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^{-n-2}(\mathbf{x} - \mathbf{y}),$$

denn

$$\nabla(|\mathbf{x} - \mathbf{y}|) = \frac{\mathbf{x} - \mathbf{y}}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|}.$$

Insgesamt gilt damit

$$\begin{aligned} \Delta\left(\frac{a^2 - |\mathbf{x}|^2}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^n}\right) &= -2n|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^{-n} + 2n(a^2 - |\mathbf{x}|^2)|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^{-n-2} \\ &\quad + 4n|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^{-n-2} \underbrace{\mathbf{x} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{y})}_{\mathbf{x} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{y})} \\ &= \frac{1}{2}\left(|\mathbf{x}|^2 + |\mathbf{x} - \mathbf{y}|^2 - |\mathbf{y}|^2\right) \\ &= 0. \end{aligned}$$

□

### Korollar (*Harmonizität von $u$* )

Die für gegebenes  $g \in C(\partial B_a(\mathbf{0}))$  durch die Poissonsche Formel (3) definierte Funktion  $u$  ist harmonisch in  $B_a(\mathbf{0})$ .

### Beweis

Es gilt

$$\Delta_{\mathbf{x}}u(\mathbf{x}) = \frac{1}{an\omega_n} \int_{|\mathbf{y}|=a} \Delta_{\mathbf{x}}\left(\frac{a^2 - |\mathbf{x}|^2}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^n}\right) g(\mathbf{y}) dS(\mathbf{y}) = 0,$$

da die Differentiation unter dem Integral gültig ist für jedes  $\mathbf{x} \in B_\delta(\mathbf{0})$  und für jedes  $\delta \in (0, a)$ . Damit gilt also  $\Delta u = 0$  für  $\mathbf{x} \in B_\delta(\mathbf{0})$ ,  $\delta \in (0, a)$  und daher für  $\mathbf{x} \in B_a(\mathbf{0})$ . □

### Lemma

Es sei

$$H(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{a^2 - |\mathbf{x}|^2}{an\omega_n|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^n}, \quad |\mathbf{x}| < a, \quad |\mathbf{y}| = a.$$

Dann gilt

$$\int_{|\mathbf{y}|=a} H(\mathbf{x}, \mathbf{y}) dS(\mathbf{y}) = 1.$$

**Beweis**

Die Funktion

$$\phi(\mathbf{x}) = \int_{|\mathbf{y}|=a} H(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \, dS(\mathbf{y}) = \frac{a^2 - |\mathbf{x}|^2}{an\omega_n} \int_{|\mathbf{x}-\mathbf{z}|=a} \frac{1}{|\mathbf{z}|^n} \, dS(\mathbf{z})$$

ist radialsymmetrisch und aus dem obigen Korollar mit  $g = 1$  folgt, dass sie auch harmonisch in  $B_a(\mathbf{0})$  ist. Die einzigen in  $B_a(\mathbf{0})$  harmonischen radialsymmetrischen Funktionen sind aber die Konstanten. Damit ist

$$\begin{aligned} \phi(\mathbf{x}) &= \phi(\mathbf{0}) \\ &= \frac{a}{n\omega_n} \int_{|\mathbf{z}|=a} \frac{1}{|\mathbf{z}|^n} \, dS(\mathbf{z}) \\ &= \frac{1}{n\omega_n a^{n-1}} \underbrace{\int_{|\mathbf{z}|=a} dS(\mathbf{z})}_{= n\omega_n a^{n-1}} \\ &= 1. \end{aligned}$$

□

**Satz**

Es sei  $g \in C(\partial B_a(\mathbf{0}))$ . Dann erfüllt die durch die Poissonsche Formel (3) definierte Funktion  $u$  die Randbedingung (2).

**Beweis**

Wähle  $\mathbf{z} \in \partial B_a(\mathbf{0})$ . Wir zeigen, dass

$$\lim_{\substack{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{z} \\ |\mathbf{x}| < a}} u(\mathbf{x}) = g(\mathbf{z})$$

ist: Zu jedem  $\varepsilon > 0$  existieren  $\delta$ , so dass

$$|\mathbf{x} - \mathbf{z}| < \delta, \quad |\mathbf{x}| < a \quad \Rightarrow \quad |u(\mathbf{x}) - g(\mathbf{z})| < \varepsilon.$$

Zu  $\varepsilon > 0$  wählen wir  $\delta$  wie folgt:

- Da  $g$  stetig ist, existiert  $\delta_1 > 0$ , so dass

$$|\mathbf{y} - \mathbf{z}| < 2\delta_1 \quad \Rightarrow \quad |g(\mathbf{y}) - g(\mathbf{z})| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

- Da

$$\int_{\substack{|\mathbf{y}-\mathbf{z}| \geq 2\delta_1 \\ |\mathbf{y}|=a}} \frac{a^2 - |\mathbf{x}|^2}{an\omega_n \delta_1^n} \, dS(\mathbf{y}) \rightarrow 0$$

für  $|\mathbf{x}| \rightarrow a$  und insbesondere für  $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{z}$ , existiert  $\delta_2 > 0$ , so dass

$$|\mathbf{x} - \mathbf{z}| < \delta_2 \quad \Rightarrow \quad \int_{\substack{|\mathbf{y}-\mathbf{z}| \geq 2\delta_1 \\ |\mathbf{y}|=a}} \frac{a^2 - |\mathbf{x}|^2}{an\omega_n\delta_1^n} dS(\mathbf{y}) < \frac{\varepsilon}{4M},$$

wobei

$$M = \sup_{\mathbf{x} \in \partial B_a(\mathbf{0})} |g(\mathbf{x})|.$$

- Wir setzen  $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$ .

Für  $|\mathbf{x} - \mathbf{z}| < \delta$  gilt nun

$$\begin{aligned} & |u(\mathbf{x}) - g(\mathbf{z})| \\ &= \left| \int_{|\mathbf{y}|=a} H(\mathbf{x}, \mathbf{y}) g(\mathbf{y}) dS(\mathbf{y}) - g(\mathbf{z}) \right| \\ &= \left| \int_{|\mathbf{y}|=a} H(\mathbf{x}, \mathbf{y}) g(\mathbf{y}) dS(\mathbf{y}) - \underbrace{\int_{|\mathbf{y}|=a} H(\mathbf{x}, \mathbf{y}) dS(\mathbf{y})}_{=1} g(\mathbf{z}) \right| \\ &= \left| \int_{|\mathbf{y}|=a} H(\mathbf{x}, \mathbf{y}) (g(\mathbf{y}) - g(\mathbf{z})) dS(\mathbf{y}) \right| \\ &\leq \left| \int_{\substack{|\mathbf{y}-\mathbf{z}| \geq 2\delta_1 \\ |\mathbf{y}|=a}} H(\mathbf{x}, \mathbf{y}) (g(\mathbf{y}) - g(\mathbf{z})) dS(\mathbf{y}) \right| + \left| \int_{\substack{|\mathbf{y}-\mathbf{z}| < 2\delta_1 \\ |\mathbf{y}|=a}} H(\mathbf{x}, \mathbf{y}) (g(\mathbf{y}) - g(\mathbf{z})) dS(\mathbf{y}) \right| \\ &\leq 2M \int_{\substack{|\mathbf{y}-\mathbf{z}| \geq 2\delta_1 \\ |\mathbf{y}|=a}} H(\mathbf{x}, \mathbf{y}) dS(\mathbf{y}) + \sup_{|\mathbf{y}-\mathbf{z}| < 2\delta_1} |g(\mathbf{y}) - g(\mathbf{z})| \underbrace{\int_{\substack{|\mathbf{y}-\mathbf{z}| < 2\delta_1 \\ |\mathbf{y}|=a}} H(\mathbf{x}, \mathbf{y}) dS(\mathbf{y})}_{\leq 1} \\ &\leq 2M \int_{\substack{|\mathbf{y}-\mathbf{z}| \geq 2\delta_1 \\ |\mathbf{y}|=a}} \frac{a^2 - |\mathbf{x}|^2}{an\omega_n\delta_1^n} dS(\mathbf{y}) + \sup_{|\mathbf{y}-\mathbf{z}| < 2\delta_1} |g(\mathbf{y}) - g(\mathbf{z})| \\ &\quad \text{(denn } |\mathbf{x} - \mathbf{z}| < \delta_1, |\mathbf{y} - \mathbf{z}| \geq 2\delta_1 \Rightarrow |\mathbf{x} - \mathbf{y}| \geq \delta_1) \\ &\leq 2M \frac{\varepsilon}{4M} + \frac{\varepsilon}{2} \\ &= \varepsilon. \end{aligned}$$

□

#### 4.4.2 Das schwache Maximum-Prinzip

Im folgenden sei  $\Omega$  immer ein beschränktes Gebiet des  $\mathbb{R}^n$ .

Wir sagen, eine Funktion  $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$  ist

$$\begin{array}{ll} \text{subharmonisch, falls} & -\Delta u \leq 0 \quad \text{in } \Omega, \quad \text{und} \\ \text{superharmonisch, falls} & -\Delta u \geq 0 \quad \text{in } \Omega. \end{array}$$

**Satz (*Schwaches Maximum-Prinzip für subharm. Fkt*)**

Sei  $u$  subharmonisch (bzw. superharmonisch). Dann gilt

$$\max_{\mathbf{x} \in \overline{\Omega}} u(\mathbf{x}) = \max_{\mathbf{x} \in \partial\Omega} u(\mathbf{x}) \quad \left( \text{bzw. } \min_{\mathbf{x} \in \overline{\Omega}} u(\mathbf{x}) = \min_{\mathbf{x} \in \partial\Omega} u(\mathbf{x}) \right).$$

**Beweis**

Es gelte zunächst  $-\Delta u(\mathbf{x}) < 0$  für alle  $\mathbf{x} \in \Omega$ . Angenommen, es existiert ein  $\mathbf{x}_0 \in \Omega$  mit  $u(\mathbf{x}) \leq u(\mathbf{x}_0)$  für alle  $\mathbf{x} \in \Omega$ . Da  $u$  glatt ist, gilt dann

$$\partial_{x_i} u(\mathbf{x}_0) = 0, \quad \partial_{x_i}^2 u(\mathbf{x}_0) \leq 0$$

für alle  $i = 1 \dots n$ . Dies liefert  $-\Delta u(\mathbf{x}_0) \leq 0$ , was aber der Voraussetzung widerspricht. Damit ist die obige Annahme falsch, d.h.  $u$  nimmt sein Maximum auf dem Rand an.

Es gelte nun nur  $-\Delta u(\mathbf{x}) \leq 0$  für alle  $\mathbf{x} \in \Omega$ . Für jedes  $\varepsilon > 0$  definieren wir  $v_\varepsilon(\mathbf{x}) = u(\mathbf{x}) + \exp(\varepsilon x_1)$ , wobei  $x_1$  die erste Komponente von  $\mathbf{x}$  ist. Dann gilt  $-\Delta v_\varepsilon(x) < 0$  und der erste Teil dieses Beweises liefert

$$\max_{\mathbf{x} \in \overline{\Omega}} v_\varepsilon(\mathbf{x}) = \max_{\mathbf{x} \in \partial\Omega} v_\varepsilon(\mathbf{x}). \quad (*)$$

Nach Konstruktion, und weil  $\overline{\Omega}$  kompakt ist, konvergiert  $v_\varepsilon$  für  $\varepsilon \rightarrow 0$  gleichmäßig gegen  $u$ , und deshalb können wir in (\*) zum Grenzwert übergehen (siehe ÜA).

Damit haben wir das Maximum-Prinzip für subharmonische Fkt. bewiesen. Das Minimum-Prinzip für superharmonische Fkt. kann ganz analog abgeleitet werden.

Wir leiten nun eine Reihe von Folgerungen ab.

**Korollar (*Schwaches Maximum- und Minimum-Prinzip für harmonische Fkt.*)**

Für jede harmonische Funktion  $u$  auf  $\Omega$  gilt

$$\min_{\mathbf{y} \in \partial\Omega} u(\mathbf{y}) \leq u(\mathbf{x}) \leq \max_{\mathbf{y} \in \partial\Omega} u(\mathbf{y})$$

für alle  $\mathbf{x} \in \Omega$ .

**Beweis**

Die Behauptung folgt, da jede harmonische Funktion sowohl sub- als auch superharmonisch ist.  $\square$

**Korollar (Vergleichsprinzip-Prinzip für harmonische Funktionen)**

Seien  $u_1$  und  $u_2$  zwei harmonische Funktionen auf  $\Omega$  mit

$$u_1(\mathbf{x}) \leq u_2(\mathbf{x}) \quad \text{für alle } \mathbf{x} \in \partial\Omega.$$

Dann gilt

$$u_1(\mathbf{x}) \leq u_2(\mathbf{x}) \quad \text{für alle } \mathbf{x} \in \bar{\Omega}.$$

**Beweis**

Die Behauptung folgt aus dem Maximum-Prinzip angewendet auf  $u_1 - u_2$ .  $\square$

Das Maximum-Prinzip implizieren Eindeutigkeit.

**Korollar (Eindeutigkeit von Randwert-Problemen)**

Das Randwertproblem

$$\begin{aligned} \Delta u &= f & \text{auf } \Omega, \\ u &= g & \text{auf } \partial\Omega \end{aligned} \tag{2}$$

besitzt höchstens eine Lösung  $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ .

**Beweis**

Seien  $u_1$  und  $u_2$  zwei Lösungen. Die Differenz  $u = u_1 - u_2$  ist harmonisch in  $\Omega$  und verschwindet auf  $\partial\Omega$ . Das Maximum- und Minimum-Prinzip angewendet auf  $u$  zeigt nun, dass  $u$  auf ganz  $\Omega$  verschwindet.  $\square$

**Korollar (Eindeutigkeit von Randwert-Problemen)**

Die Poissonsche Formel (3) liefert die eindeutige Lösung  $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$  zum Randwertproblem (1)-(2).

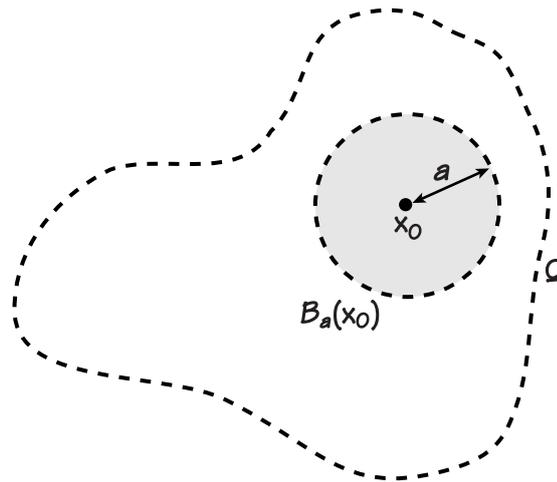
Wir können schliesslich beweisen, dass harmonische Funktionen sehr glatt sind.

**Satz (Regularität harmonischer Funktionen)**

Für jede harmonische Funktion  $u$  auf  $\Omega$  gilt sogar  $u \in C^\infty(\Omega)$ .

**Beweis**

Sei  $\mathbf{x}_0 \in \Omega$  beliebig und  $a > 0$  hinreichend klein, so dass  $\bar{B}_a(\mathbf{x}_0) \subset \Omega$ . Es genügt zu zeigen, dass  $u$  auf dieser Kugel unendlich oft differenzierbar ist. Um die Notation zu vereinfachen, wollen wir o.B.d.A. annehmen, dass  $\mathbf{x}_0 = 0$  gilt; der allgemeine Fall kann dann mit einer einfachen Verschiebung auf diesen Spezialfall zurückgeführt werden.



Nach der Poissonschen Formel gilt nun

$$u(\mathbf{x}) = \frac{1}{an\omega_n} \int_{|\mathbf{y}|=a} (a^2 - |\mathbf{x}|^2) \frac{u(\mathbf{y})}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^n} dS(\mathbf{y})$$

für alle  $\mathbf{x} \in B_a(\mathbf{0})$ . Da  $u$  glatt ist und  $|\mathbf{x} - \mathbf{y}| > 0$  für alle  $|\mathbf{y}| = 1$  gilt, können wir unter dem Integral nach  $\mathbf{x}$  differenzieren. Dies liefert

$$\partial_{x_1}^{\alpha_1} \dots \partial_{x_n}^{\alpha_n} u(\mathbf{x}) = \frac{1}{an\omega_n} \int_{|\mathbf{y}|=a} \partial_{x_1}^{\alpha_1} \dots \partial_{x_n}^{\alpha_n} \left( \frac{a^2 - |\mathbf{x}|^2}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^n} \right) u(\mathbf{y}) dS(\mathbf{y})$$

für alle  $\alpha_1, \dots, \alpha_n = 0, 1, \dots$ . Insbesondere existieren alle Ableitungen von  $u$ , und es folgt die Behauptung.  $\square$

### 4.4.3 Die Mittelwert-Eigenschaft harmonischer Fkt.

**Lemma (Mittelwertsatz für harmonische Funktionen)**

Es sei  $u$  harmonisch in  $B_a(\mathbf{x}_0)$ . Dann gilt

$$u(\mathbf{x}_0) = \bar{u}_a(\mathbf{x}_0),$$

wobei

$$\bar{u}_a(\mathbf{x}_0) = \frac{1}{\underbrace{n\omega_n a^{n-1}}_{\substack{\text{Flächeninhalt} \\ \text{von } \partial B_a(\mathbf{x}_0)}}} \int_{\partial B_a(\mathbf{x}_0)} u(\mathbf{y}) dS(\mathbf{y})$$

der Mittelwert von  $u$  über  $\partial B_a(\mathbf{x}_0)$  ist.

**Beweis**

O.B.d.A. können wir  $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$  annehmen. Aus der Poissonschen Formel folgt

$$u(\mathbf{x}) = \frac{a^2 - |\mathbf{x}|^2}{an\omega_n} \int_{|\mathbf{y}|=a} \frac{u(\mathbf{y})}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^n} dS(\mathbf{y})$$

für alle  $|\mathbf{x}| < a$ . Insbesondere gilt

$$u(\mathbf{0}) = \frac{a}{n\omega_n} \int_{|\mathbf{y}|=a} \frac{u(\mathbf{y})}{|\mathbf{y}|^n} dS(\mathbf{y}) = \frac{1}{n\omega_n a^{n-1}} \int_{|\mathbf{y}|=a} u(\mathbf{y}) dS(\mathbf{y}) = \bar{u}_a(\mathbf{0}).$$

□

### Lemma (*Mittelwertungleichungen*)

1. Für subharmonische Funktionen  $u$  in  $B_a(\mathbf{x}_0)$  gilt

$$u(\mathbf{x}_0) \leq \bar{u}_a(\mathbf{x}_0).$$

2. Für superharmonische Funktionen  $u$  in  $B_a(\mathbf{x}_0)$  gilt

$$v(\mathbf{x}_0) \geq \bar{v}_a(\mathbf{x}_0).$$

### Beweis

Für gegebenes subharmonisches  $u$  sei  $w \in C^2(B_a(\mathbf{x}_0)) \cap C(\bar{B}_a(\mathbf{x}_0))$  die eindeutige Lösung des Randwertproblems

$$\begin{aligned} \Delta w &= 0, & \mathbf{x} &\in B_a(\mathbf{x}_0), \\ w &= u, & \mathbf{x} &\in \partial B_a(\mathbf{x}_0). \end{aligned}$$

Die Funktionen  $u$  und  $w$  sind also subharmonisch bzw. harmonisch in  $B_a(\mathbf{x}_0)$  und haben dieselben Randwerte auf  $\partial B_a(\mathbf{x}_0)$ . Aus dem schwachen Maximumsprinzip folgt damit

$$u(\mathbf{x}) \leq w(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \bar{B}_a(\mathbf{x}_0).$$

Damit gilt

$$\begin{aligned} u(\mathbf{x}_0) &\leq w(\mathbf{x}_0) && \text{(obiges Ergebnis mit } \mathbf{x} = \mathbf{x}_0) \\ &= \bar{u}_a(\mathbf{x}_0) && \text{(Mittelwertsatz für harmonische Funktionen)} \\ &= \bar{u}_a(\mathbf{x}_0) && (u = w \text{ auf } \partial B_a(\mathbf{x}_0).) \end{aligned}$$

Die zweite Aussage wird in ähnlicher Weise bewiesen. □

Wir können nun die folgende Verallgemeinerungen der Begriffe sub-, super- und harmonisch für stetige Funktionen einführen.

### Definition

Eine Funktion  $u \in C(\bar{\Omega})$  heißt

- **harmonisch im Mittelwertsinne** in  $\Omega$ , falls  $u(\mathbf{x}_0) = \bar{u}_a(\mathbf{x}_0)$
- **subharmonisch im Mittelwertsinne** in  $\Omega$ , falls  $u(\mathbf{x}_0) \leq \bar{u}_a(\mathbf{x}_0)$
- **superharmonisch im Mittelwertsinne** in  $\Omega$ , falls  $u(\mathbf{x}_0) \geq \bar{u}_a(\mathbf{x}_0)$

für alle  $\bar{B}_a(\mathbf{x}_0) \subset \Omega$  gilt.

**Bemerkung**

Es sei  $u \in C^2(\Omega)$ . Unsere Ergebnisse zeigen:

$$\left. \begin{array}{ll} - \Delta u = 0 \text{ in } \Omega & \Rightarrow u(\mathbf{x}_0) = \bar{u}_a(\mathbf{x}_0) \\ - \Delta u \leq 0 \text{ in } \Omega & \Rightarrow u(\mathbf{x}_0) \leq \bar{u}_a(\mathbf{x}_0) \\ - \Delta u \geq 0 \text{ in } \Omega & \Rightarrow u(\mathbf{x}_0) \geq \bar{u}_a(\mathbf{x}_0) \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{für alle } \mathbf{x}_0 \in \Omega \text{ und alle} \\ a > 0 \text{ mit } \bar{B}_a(\mathbf{x}_0) \subset \Omega \end{array}$$

Wir beweisen nun, dass die Umkehrung dieser Aussage ebenfalls gilt, sodass die zwei Definitionen von ‘subharmonisch’, ‘superharmonisch’ und ‘harmonisch’ für zweimal stetig differenzierbare Funktionen äquivalent sind. Dazu beweisen wir das folgende Hilfsresultat.

**Lemma**

Für  $u \in C^2(\Omega)$  gilt

$$\frac{d}{dr} \left( \frac{1}{n\omega_n r^{n-1}} \int_{\partial B_r(\mathbf{x})} u(\mathbf{y}) \, dS(\mathbf{y}) \right) = \frac{1}{n\omega_n r^{n-1}} \int_{B_r(\mathbf{x})} \Delta u(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y}$$

für alle  $\mathbf{x} \in \Omega$  und alle  $r > 0$  mit  $\bar{B}_r(\mathbf{x}) \subset \Omega$ .

**Beweis**

Die Substitution

$$\mathbf{z} = \frac{1}{r}(\mathbf{y} - \mathbf{x})$$

bildet  $B_r(\mathbf{x})$  auf  $B_1(\mathbf{0})$  ab und liefert

$$\frac{1}{n\omega_n r^{n-1}} \int_{\partial B_r(\mathbf{x})} u(\mathbf{y}) \, dS(\mathbf{y}) = \frac{1}{n\omega_n} \int_{\partial B_1(\mathbf{0})} u(\mathbf{x} + r\mathbf{z}) \, dS(\mathbf{z}).$$

Es gilt also

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr} \left( \frac{1}{n\omega_n r^{n-1}} \int_{\partial B_r(\mathbf{x})} u(\mathbf{y}) \, dS(\mathbf{y}) \right) &= \frac{1}{n\omega_n} \int_{\partial B_1(\mathbf{0})} \nabla_{\mathbf{y}} u(\mathbf{x} + r\mathbf{z}) \cdot \mathbf{z} \, dS(\mathbf{z}) \\ &= \frac{1}{n\omega_n r^{n-1}} \int_{\partial B_r(\mathbf{x})} \nabla u(\mathbf{y}) \cdot \left( \frac{\mathbf{y} - \mathbf{x}}{r} \right) \, dS(\mathbf{y}) \\ &= \frac{1}{n\omega_n r^{n-1}} \int_{\partial B_r(\mathbf{x})} \nabla u(\mathbf{y}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{y}) \, dS(\mathbf{y}) \\ &= \frac{1}{n\omega_n r^{n-1}} \int_{\partial B_r(\mathbf{x})} \frac{\partial u}{\partial n}(\mathbf{y}) \, dS(\mathbf{y}) \\ &= \frac{1}{n\omega_n r^{n-1}} \int_{B_r(\mathbf{x})} \Delta u(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y}, \end{aligned}$$

wobei die Identitäten

- $\mathbf{n}(\mathbf{y}) = \frac{\mathbf{y} - \mathbf{x}}{r}$  auf  $\partial B_r(\mathbf{x})$ ;

- $\int_G \Delta w(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y} = \int_{\partial G} \frac{\partial w}{\partial n}(\mathbf{y}) \, dS(\mathbf{y})$  für alle  $w \in C^2(\bar{G})$  und alle Gebiete  $G \subset \mathbb{R}^n$

benutzt wurden. □

**Satz**

1. Es sei  $u \in C^2(\Omega)$  subharmonisch im Mittelwertsinne in einem Gebiet  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ . Dann gilt  $-\Delta u \leq 0$  in  $\Omega$ .
2. Es sei  $u \in C^2(\Omega)$  superharmonisch im Mittelwertsinne in einem Gebiet  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ . Dann gilt  $-\Delta u \geq 0$  in  $\Omega$ .
3. Es sei  $u \in C^2(\Omega)$  harmonisch im Mittelwertsinne in einem Gebiet  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ . Dann gilt  $-\Delta u = 0$  in  $\Omega$ .

**Beweis**

Seien  $\mathbf{x}_0 \in \Omega$  und  $r > 0$  gegeben mit  $\overline{B}_r(\mathbf{x}_0) \subset \Omega$ . Das vorherige Lemma besagt

$$\frac{d}{dr} \left( \bar{u}_r(\mathbf{x}_0) \right) = \frac{1}{n\omega_n r^{n-1}} \int_{B_r(\mathbf{x}_0)} \Delta_{\mathbf{y}} u(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y},$$

und Integration über  $(0, R)$  liefert

$$\bar{u}_R(\mathbf{x}_0) - u(\mathbf{x}_0) = \frac{1}{n} \int_0^R r F_r(\mathbf{x}_0) \, dr,$$

wobei

$$F_r(\mathbf{x}_0) = \frac{1}{\underbrace{\omega_n r^n}_{\substack{\text{Rauminhalt} \\ \text{von } B_r(\mathbf{x}_0)}}} \int_{B_r(\mathbf{x}_0)} \Delta_{\mathbf{y}} u(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y}$$

der Mittelwert von  $\Delta u$  über  $B_r(\mathbf{x}_0)$  ist.

Sei  $u$  nun subharmonisch in  $\Omega$ . Dann gilt  $u(\mathbf{x}_0) \leq \bar{u}_R(\mathbf{x}_0)$  und daher

$$\int_0^R r F_r(\mathbf{x}_0) \, dr \geq 0 \quad (\star)$$

für alle  $\mathbf{x}_0 \in \Omega$  und alle  $R > 0$  mit  $\overline{B}_R(\mathbf{x}_0) \subset \Omega$  ist. Hieraus folgt nun schon  $\Delta u(\mathbf{x}_0) \geq 0$ , wie folgendes indirekte Argument zeigt: Die Bedingung  $\Delta u(\mathbf{x}_0) < 0$  impliziert, wegen der Stetigkeit von  $\Delta u$ , die Existenz eines kleinen Radiuses  $R > 0$  so dass  $\Delta u < 0$  in  $B_R(\mathbf{x}_0)$  gilt. Die Monotonie der Mittelwertbildung liefert nun  $F_r(\mathbf{x}_0) < 0$  für alle  $0 < r < R$ , und damit einen Widerspruch zu  $(\star)$ .

Wir haben nun die Behauptung für den subharmonischen Fall bewiesen; alle anderen Aussagen folgen analog.  $\square$

**4.4.4 Das starke Maximum-Prinzip**

Wir wollen nun das schwache Maximum-Prinzip verschärfen.

**Satz (Das starke Maximum-Prinzip)**

Sei  $u \in C(\overline{\Omega})$  eine im Mittelwertsinne subharmonische Funktion auf  $\Omega$ . Dann ist  $u$  entweder konstant oder es gilt

$$u(\mathbf{x}) < \max_{\mathbf{y} \in \overline{\Omega}} u(\mathbf{y})$$

für alle  $\mathbf{x} \in \Omega$ .

**Beweis**

Da  $u$  stetig ist und  $\overline{\Omega}$  kompakt ist, wird das Maximum  $M$  von  $u$  in einem Punkt  $\mathbf{x}_0 \in \overline{\Omega}$  angenommen. Wir zeigen nun die Implikation

$$\mathbf{x}_0 \text{ liegt in } \Omega \quad \Rightarrow \quad u = M \text{ auf } \overline{\Omega}.$$

Sei also  $\mathbf{x}_0 \in \Omega$ , und sei  $r > 0$  irgendein Radius mit  $\overline{B}_r(\mathbf{x}_0) \in \Omega$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} M &= u(\mathbf{x}_0) \\ &\leq \bar{u}_r(\mathbf{x}_0) && (u \text{ ist subharmonisch in } \Omega) \\ &\leq M && (\text{da } u \leq M \text{ überall in } \Omega \text{ ist, ist der Mittelwert von } u \\ &&& \text{über jede Teilmenge von } \Omega \text{ kleiner gleich } M), \end{aligned}$$

und damit

$$\bar{u}_r(\mathbf{x}_0) = M.$$

Insbesondere ist Mittelwert von  $u$  über  $\partial B_r(\mathbf{x}_0)$  gleich dem Maximum von  $u$  auf  $\Omega$ , und deshalb gilt

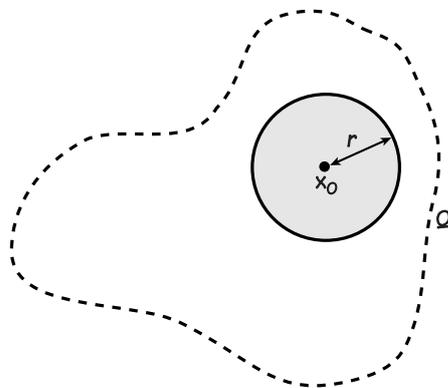
$$u(\mathbf{x}) = M \quad \text{für alle } \mathbf{x} \in \partial B_r(\mathbf{x}_0).$$

Mit derselben Argumentation zeigen wir

$$u(\mathbf{x}) = M \quad \text{für alle } \mathbf{x} \in \partial B_a(\mathbf{x}_0)$$

für jedes  $a$  mit  $0 < a < r$ , und deshalb gilt

$$u(\mathbf{x}) = M \quad \text{für alle } \mathbf{x} \in \overline{B}_r(\mathbf{x}_0).$$



Die Annahme, dass  $u(\mathbf{x}_0) = M$  führt dazu, dass  $u = M$  in der schraffierten Region gilt.

Wir haben nun gezeigt, dass die Menge

$$S_1 = \{\mathbf{x}_0 \in \Omega : u(\mathbf{x}_0) = M\}$$

offen ist.

Die Menge

$$S_2 = \{\mathbf{x}_0 \in \Omega : u(\mathbf{x}_0) < M\}$$

ist auch offen (da  $u$  stetig ist) und außerdem gilt  $\Omega = S_1 \cup S_2$  sowie  $S_1 \cap S_2 = \emptyset$ . Da aber  $\Omega$  offen und zusammenhängend ist, gibt es keine solche Darstellung als disjunkte Vereinigung offener Mengen, es sei denn eine der beiden offenen Mengen ist leer (das ist im Wesentlichen die Definition von Zusammenhang). Nach Konstruktion gilt  $S_1 \neq \emptyset$ , und deshalb folgt  $S_1 = \Omega$ .  $\square$

**Bemerkungen**

1. Der Beweis zeigt, dass das Maximum-Prinzip auch dann gilt,

$$u(\mathbf{x}_0) \leq \bar{u}_r(\mathbf{x}_0)$$

nur für alle hinreichend kleinen Werte von  $r$  erfüllt ist.

2. Analog kann das starke Minimum-Prinzip für im Mittelwertsinne superharmonische Funktionen abgeleitet werden.
3. Aus dem Maximum-Prinzip folgt Eindeutigkeit einer in einem beschränkten Gebiet  $\Omega$  im Mittelwertsinne harmonischen Funktion mit vorgeschriebenen Werten auf  $\partial\Omega$ .

**Beispiel**

Seien  $u_1$  und  $u_2$  zwei im Mittelwertsinne subharmonische Funktionen auf  $\Omega$ , und sei eine im Mittelwertsinne harmonische Funktion auf  $\Omega$ . Zeigen Sie:

1.  $\max(u_1, u_2)$  ist im Mittelwertsinne subharmonisch in  $\Omega$ ;
2.  $\max_{\mathbf{x} \in \Omega} |u(\mathbf{x})| = \max_{\mathbf{x} \in \partial\Omega} |u(\mathbf{x})|$ .

**Lösung**

1. Wir definieren  $u(\mathbf{x}) = \max(u_1(\mathbf{x}), u_2(\mathbf{x}))$ , und betrachten eine beliebige Kugel  $\bar{B}_r(\mathbf{x}_0) \subset \Omega$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} u_1(\mathbf{x}_0) &\leq \bar{u}_{1r}(\mathbf{x}_0), \\ u_2(\mathbf{x}_0) &\leq \bar{u}_{2r}(\mathbf{x}_0), \end{aligned}$$

weil  $u_1, u_2$  subharmonisch sind, und

$$\begin{aligned} \bar{u}_{1r}(\mathbf{x}_0) &\leq \bar{u}_r(\mathbf{x}_0), \\ \bar{u}_{2r}(\mathbf{x}_0) &\leq \bar{u}_r(\mathbf{x}_0), \end{aligned}$$

weil  $u_1 \leq u, u_2 \leq u$ . Hieraus folgt

$$\begin{aligned} u_1(\mathbf{x}_0) &\leq \bar{u}_r(\mathbf{x}_0), \\ u_2(\mathbf{x}_0) &\leq \bar{u}_r(\mathbf{x}_0) \end{aligned}$$

und deshalb

$$u(\mathbf{x}_0) \leq \bar{u}_r(\mathbf{x}_0).$$

Da diese Ungleichung für alle Kugeln  $\bar{B}_r(\mathbf{x}_0) \subset \Omega$  gilt, ist  $u$  subharmonisch in  $\Omega$ .

2. Aus der Identität

$$|\alpha| = \max(\alpha, -\alpha)$$

folgt

$$u(\mathbf{x}) = \max(u(\mathbf{x}), -u(\mathbf{x})).$$

Da  $u$  harmonisch ist, sind sowohl  $u$  als auch  $-u$  subharmonisch, und Teil (i) zeigt, dass  $|u|$  ebenfalls subharmonisch ist. Die Behauptung folgt nun aus dem Maximum-Prinzip.  $\square$

**Satz**

Sei  $u$  harmonisch im Mittelwertsinne. Dann ist  $u$  zweimal stetig differenzierbar und es gilt  $\Delta u = 0$  in  $\Omega$ .

**Beweis**

Wir wähle  $\mathbf{x}_0 \in \Omega$  und  $r > 0$  beliebig mit  $\overline{B}_r(\mathbf{x}_0) \subset \Omega$ , und betrachten das Randwert-Problem

$$\begin{aligned} \Delta w &= 0, & \mathbf{x} \in B_r(\mathbf{x}_0), \\ w &= u, & \mathbf{x} \in \partial B_r(\mathbf{x}_0), \end{aligned}$$

dessen eindeutige Lösung ist durch Poissonsche Formel

$$w(\mathbf{x}) = \frac{r^2 - |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|^2}{rn\omega_n} \int_{\partial B_r(\mathbf{x}_0)} \frac{u(\mathbf{y})}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^n} dS(\mathbf{y})$$

gegeben ist. Insbesondere ist  $w$  harmonisch im Mittelwertsinne in  $B_r(\mathbf{x}_0)$  und gleich  $u$  auf  $\partial B_r(\mathbf{x}_0)$ . Da die Funktion  $u$  nach Voraussetzung aber auch diese Eigenschaften hat, gilt nun (siehe Bemerkung oben)

$$u = w \quad \text{auf} \quad \overline{B}_r(\mathbf{x}_0).$$

Damit haben wir gezeigt, dass harmonisch (im klassischen Sinne) auf  $B_r(\mathbf{x}_0)$  ist, und weil dies für alle Kugeln  $\overline{B}_r(\mathbf{x}_0) \subset \Omega$  gilt, folgt die Behauptung.  $\square$

**Bemerkung**

Wir haben nun gezeigt, dass die ‘klassische’ Definition von Harmonizität äquivalent zur Definition durch Mittelwerte ist. Ab sofort werden wir also nur noch von ‘harmonischen Funktionen’ reden.

**4.4.5 Konvergenzsätze für Folgen harmonischer Funktionen**

In diesem Abschnitt besprechen wir, wann eine Folge harmonischer Funktionen gegen eine harmonische Funktion konvergiert. Dazu sei  $\Omega$  wieder ein beschränktes Gebiet im  $\mathbb{R}^n$ .

**Lemma (Lokal gleichmässige Konvergenz harmonischer Fkt.)**

Es sei  $\{u_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  eine Folge von Funktionen auf  $\Omega$  mit den folgenden Eigenschaften:

1.  $u_k$  ist harmonisch in  $\Omega$  für  $k = 1, 2, \dots$
2. Es gibt eine Funktion  $u$ , so dass auf jeder abgeschlossene Kugel  $\overline{B}_r(\mathbf{x}_0) \subset \Omega$  die Folge  $\{u_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  gleichmäßig gegen  $u$  konvergiert, d.h.

$$\sup_{\mathbf{x} \in \overline{B}_r(\mathbf{x}_0)} |u_k(\mathbf{x}) - u(\mathbf{x})| \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0.$$

Dann ist  $u$  harmonisch in  $\Omega$ .

**Beweis**

Für jede Kugel  $\overline{B}_r(\mathbf{x}_0) \subset \Omega$  gilt

$$\begin{aligned}
 u(\mathbf{x}_0) &= \lim_{k \rightarrow \infty} u_k(\mathbf{x}_0) \\
 &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{n\omega_n r^{n-1}} \int_{\partial B_r(\mathbf{x}_0)} u_k(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y} \quad (u_k \text{ ist harmonisch}) \\
 &= \frac{1}{n\omega_n r^{n-1}} \int_{\partial B_r(\mathbf{x}_0)} \lim_{k \rightarrow \infty} u_k(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y} \quad (u_k \rightarrow u \text{ gleichmäßig auf } \overline{B}_r(\mathbf{x}_0)) \\
 &= \frac{1}{n\omega_n r^{n-1}} \int_{\partial B_r(\mathbf{x}_0)} u(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y}.
 \end{aligned}$$

Insbesondere ist  $u$  harmonisch (im Mittelwertsinne). □

**Satz (Erster Harnackscher Konvergenzsatz)**

Sei  $\{u_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  eine Folge von Funktionen auf  $\Omega$  mit den folgenden Eigenschaften:

1.  $u_k$  ist harmonisch in  $\Omega$  für alle  $k$ .
2. Die Folge  $\{g_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  mit  $g_k = u_k|_{\partial\Omega}$  konvergiert gleichmäßig auf  $\partial\Omega$ .

Dann konvergiert  $\{u_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  gleichmäßig gegen eine in  $\Omega$  harmonische Funktion  $u$ .

**Beweis**

Da  $\{g_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  gleichmäßig konvergiert, gibt es zu jedem  $\varepsilon > 0$  ein  $N > 0$ , so dass

$$|g_m(\mathbf{x}) - g_n(\mathbf{x})| < \varepsilon \quad \text{für alle } \mathbf{x} \in \Omega \text{ und alle } m, n > N.$$

Damit folgt aus dem Maximum-Prinzip

$$\begin{aligned}
 \max_{\mathbf{x} \in \overline{\Omega}} |u_m(\mathbf{x}) - u_n(\mathbf{x})| &= \max_{\mathbf{x} \in \partial\Omega} |u_m(\mathbf{x}) - u_n(\mathbf{x})| \\
 &= \max_{\mathbf{x} \in \partial\Omega} |g_m(\mathbf{x}) - g_n(\mathbf{x})| \\
 &< \varepsilon.
 \end{aligned}$$

Insbesondere ist  $\{u_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  ist eine gleichmäßige Cauchy-Folge in  $\overline{\Omega}$ , und konvergiert deshalb gleichmäßig gegen eine Funktion  $u \in C(\overline{\Omega})$ . Die Harmonizität von  $u$  folgt nun aus dem vorherigen Lemma. □

**Satz (Harnacksche Ungleichung)**

Es sei  $u$  harmonisch und nichtnegativ auf  $B_R(\mathbf{x}_0)$ . Dann gilt

$$u(\mathbf{x}_0) \left( \frac{R}{R+r} \right)^{n-2} \frac{R-r}{R+r} \leq u(\mathbf{x}) \leq u(\mathbf{x}_0) \left( \frac{R}{R-r} \right)^{n-2} \frac{R+r}{R-r}$$

für alle  $r < R$  und alle  $\mathbf{x} \in \overline{B}_r(\mathbf{x}_0)$ .

**Beweis**

Aus der Poissonschen Formel folgt

$$u(\mathbf{x}) = \frac{R^2 - |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|^2}{n\omega_n R} \int_{\partial B_R(\mathbf{x}_0)} \frac{u(\mathbf{y})}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^n} dS(\mathbf{y}) \quad (*)$$

für  $\mathbf{x} \in B_R(\mathbf{x}_0)$  und insbesondere für  $\mathbf{x} \in \bar{B}_r(\mathbf{x}_0)$ . Für jedes  $\mathbf{y} \in \partial B_R(\mathbf{x}_0)$  gilt damit

$$\begin{aligned} |\mathbf{x} - \mathbf{y}| &= |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0 + \mathbf{x}_0 - \mathbf{y}| \leq |\mathbf{x}_0 - \mathbf{y}| + |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| = R + |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|, \\ |\mathbf{x} - \mathbf{y}| &= |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0 + \mathbf{x}_0 - \mathbf{y}| \geq |\mathbf{x}_0 - \mathbf{y}| - |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| = R - |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|. \end{aligned}$$

Einsetzen in (\*) liefert nun

$$\begin{aligned} & \frac{R^2 - |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|^2}{(R + |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|)^n} R^{n-2} \underbrace{\left( \frac{1}{n\omega_n R^{n-1}} \int_{\partial B_R(\mathbf{x}_0)} u(\mathbf{y}) dS(\mathbf{y}) \right)}_{= u(\mathbf{x}_0)} \\ & \leq u(\mathbf{x}) \\ & \leq \frac{R^2 - |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|^2}{(R - |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|)^n} R^{n-2} \underbrace{\left( \frac{1}{n\omega_n R^{n-1}} \int_{\partial B_R(\mathbf{x}_0)} u(\mathbf{y}) dS(\mathbf{y}) \right)}_{= u(\mathbf{x}_0)} \end{aligned}$$

und mit Hilfe der binomischen Formel finden wir

$$\begin{aligned} & u(\mathbf{x}_0) \left( \frac{R}{R + |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|} \right)^{n-2} \frac{R - |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|}{R + |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|} \\ & \leq u(\mathbf{x}) \\ & \leq u(\mathbf{x}_0) \left( \frac{R}{R - |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|} \right)^{n-2} \frac{R + |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|}{R - |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|}. \end{aligned}$$

Wir erhalten hieraus die Harnacksche Ungleichung, indem wir zusätzlich die Abschätzung

$$|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| \leq r$$

benutzen. □

**Korollar (Satz von Liouville)**

Sei  $u \in C(\mathbb{R}^n)$  eine harmonische Funktion auf ganz  $\mathbb{R}^n$ , die nach oben oder nach unten beschränkt ist. Dann ist  $u$  konstant.

**Beweis**

Wir definieren  $v(\mathbf{x}) := u(\mathbf{x}) - m$ , falls  $u(\mathbf{x}) \geq m$  für alle  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ , bzw.  $v(\mathbf{x}) := M - u(\mathbf{x})$ , falls  $u(\mathbf{x}) \leq M$  für alle  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ . Damit ist  $v$  überall harmonisch und nichtnegativ.

Außerdem wählen wir  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  und  $r > 0$  groß genug, so dass  $|\mathbf{x}| < r$  ist. Aus der Harnackschen Ungleichung folgt

$$v(\mathbf{0}) \left( \frac{R}{R+r} \right)^{n-2} \frac{R-r}{R+r} \leq v(\mathbf{x}) \leq v(\mathbf{0}) \left( \frac{R}{R-r} \right)^{n-2} \frac{R+r}{R-r}$$

für alle  $R > r$ , und im Limes  $R \rightarrow \infty$  ergibt dies diese Abschätzung

$$v(\mathbf{0}) \leq v(\mathbf{x}) \leq v(\mathbf{0}).$$

Insbesondere ist  $v$  konstant, und dies impliziert die Behauptung.  $\square$

**Satz (Zweiter Harnacksche Konvergenzsatz)**

Sei  $\{u_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  eine Folge von Funktionen auf  $\Omega$  mit den folgenden Eigenschaften:

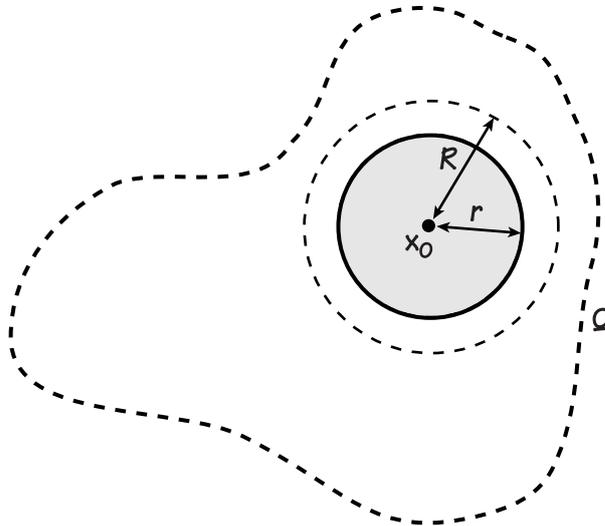
1.  $u_k$  ist harmonisch in  $\Omega$  für jedes  $k$ .
2.  $u_k \leq u_{k+1}$  in  $\Omega$  für jedes  $k$ .
3. Die Folge  $\{u_k(\mathbf{x})\}_{k \in \mathbb{N}}$  ist für jedes  $\mathbf{x} \in \Omega$  nach oben beschränkt.

Dann konvergiert  $\{u_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  punktweise gegen eine in  $\Omega$  harmonische Funktion  $u$  und diese Konvergenz ist sogar gleichmäßig auf jeder abgeschlossenen Kugel  $\overline{B}_r(\mathbf{x}_0) \subset \Omega$ .

**Beweis**

Wir zeigen, dass  $\{u_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  auf jeder abgeschlossenen Kugel  $\overline{B}_r(\mathbf{x}_0) \subset \Omega$  gleichmäßig konvergiert. Die Behauptung folgt dann unmittelbar aus dem ersten Lemma in diesem Abschnitt.

Sei also  $\overline{B}_r(\mathbf{x}_0) \subset \Omega$  fixiert. Da  $\Omega$  offen ist, existiert  $R > r$ , so dass  $\overline{B}_r(\mathbf{x}_0) \subset B_R(\mathbf{x}_0) \subset \Omega$ .



Für zwei beliebige Indizes  $k > \ell$  ist  $u_k - u_\ell$  harmonisch und nichtnegativ in  $\Omega$  und damit auch in  $B_R(\mathbf{x}_0)$ . Aus der Harnackschen Ungleichung folgt also

$$0 \leq u_k(\mathbf{x}) - u_\ell(\mathbf{x}) \leq (u_k(\mathbf{x}_0) - u_\ell(\mathbf{x}_0)) \left( \frac{R}{R-r} \right)^{n-2} \frac{R+r}{R-r}$$

für  $\mathbf{x} \in \overline{B}_r(\mathbf{x}_0)$ . Da die Folge  $\{u_k(\mathbf{x}_0)\}_{k \in \mathbb{N}}$  nach Voraussetzung konvergiert, gilt

$$0 = \lim_{k, l \rightarrow \infty, k > l} u_k(\mathbf{x}_0) - u_l(\mathbf{x}_0),$$

und damit auch

$$0 = \lim_{k,l \rightarrow \infty, k > l} \left( \sup_{\mathbf{x} \in \overline{B}_r(\mathbf{x}_0)} \left( u_k(\mathbf{x}) - u_l(\mathbf{x}) \right) \right),$$

Insbesondere ist die Funktionenfolge  $\{u_k|_{\overline{B}_r(\mathbf{x}_0)}\}_{k \in \mathbb{N}}$  eine gleichmäßige Cauchy-Folge und daher gleichmäßig konvergent.  $\square$

### Bemerkung

Die dritte Voraussetzung kann durch die folgende schwächere Bedingung ersetzt werden:

*Es existiert ein  $\mathbf{x}_0 \in \Omega$ , so dass  $\{u_k(\mathbf{x}_0)\}_{k \in \mathbb{N}}$  nach oben beschränkt ist.*

Die Beweisidee ist wie folgt: Analog zu oben zeigen wir, dass  $\{u_k\}$  auf jeder in  $\mathbf{x}_0$  zentrierten Kugel  $\overline{B}_r(\mathbf{x}_0) \subset \Omega$  gleichmäßig konvergent ist. Insbesondere ist die Folge  $\{u_k(\mathbf{x})\}_{k \in \mathbb{N}}$  für jedes  $\mathbf{x} \in \overline{B}_r(\mathbf{x}_0)$  nach oben beschränkt.

Dieses Argument zeigt insbesondere, dass die Menge

$$S_1 = \{\mathbf{x}_0 \in \Omega : \{u_k(\mathbf{x}_0)\}_{k \in \mathbb{N}} \text{ ist nach oben beschränkt}\}$$

offen ist. Wir betrachten nun außerdem die Menge

$$S_2 = \{\mathbf{x}_0 \in \Omega : \{u_k(\mathbf{x}_0)\}_{k \in \mathbb{N}} \text{ ist nicht nach oben beschränkt}\}.$$

Für jeden Punkt  $\mathbf{x}_0 \in S_2$  gilt  $u_k(\mathbf{x}_0) \rightarrow \infty$  für  $k \rightarrow \infty$ . Seien nun  $r$  und  $R$  zwei hinreichend kleine Radien wie in der obigen Abbildung. o.B.d.A können wir dann annehmen, dass  $u_k > 0$  auf  $B_R(x_0)$  gilt, und die Harnacksche Ungleichung liefert

$$u_k(\mathbf{x}) \geq u_k(\mathbf{x}_0) \left( \frac{R}{R+r} \right)^{n-2} \frac{R-r}{R+r} \rightarrow \infty \quad \text{für } k \rightarrow \infty$$

für alle  $\mathbf{x} \in \overline{B}_r(\mathbf{x}_0)$ . Damit haben wir dann gezeigt, dass auch die Menge  $S_2$  offen ist. Analog zum letzten Schritt im Beweis des starken Maximum-Prinzips zeigen wir nun das  $S_2 = \emptyset$  gilt.

## 4.5 Die Perronsche Methode

Die Perronsche Methode ist eine abstrakte Methode zur Lösung des Randwertproblems

$$\Delta u = 0 \quad \text{in } \Omega, \tag{1}$$

$$u = g \quad \text{in } \Omega, \tag{2}$$

wobei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  ein (hinreichend gutes) beschränktes Gebiet sei und  $g$  eine (hinreichend gute) Funktion auf  $\partial\Omega$  ist.

Diese Methode bedient sich der Konvergenzsätze für harmonische Funktionen aus dem letzten Abschnitt sowie weiterer Ergebnisse für im Mittelwertsinne subharmonische Funktionen, die wir jetzt ableiten wollen.

Im Folgenden meint ‘subharmonisch’ immer ‘subharmonisch im Mittelwertsinne’.

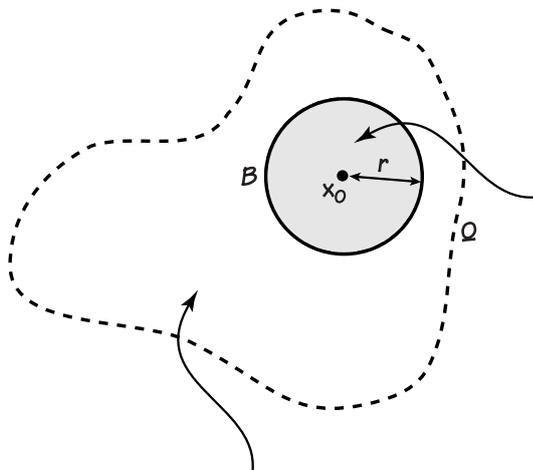
### 4.5.1 Harmonische Liftung

#### Definition

Sei  $u \in C(\bar{\Omega})$  eine Funktion und  $B = B_r(\mathbf{x}_0)$  eine offene Kugel mit  $\bar{B} \subset \Omega$ . Die **harmonische Liftung** von  $u$  ist die durch die Formel

$$u_B(\mathbf{x}) = \begin{cases} \frac{r^2 - |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|^2}{n\omega_n r} \int_{\partial B} \frac{u(\mathbf{y})}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^n} d\mathbf{y}, & \mathbf{x} \in B, \\ u(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in \bar{\Omega} \setminus B \end{cases}$$

definierte Funktion  $u_B \in C(\bar{\Omega})$ .



Hier wird  $u$  durch die Lösung von

$$\begin{aligned} \Delta w &= 0 && \text{in } B, \\ w &= u && \text{auf } \partial B \end{aligned}$$

ersetzt.

Hier wird  $u$  nicht abgeändert.

#### Lemma (*Charakterisierung von Subharmonizität*)

$u \in C(\bar{\Omega})$  ist subharmonisch genau dann, wenn  $u \leq u_B$  für jede offene Kugel  $B$  mit  $\bar{B} \subset \Omega$  gilt.

#### Beweis

Die Aussage ' $u \leq u_B$ ' ist offensichtlich äquivalent zu

$$u(\mathbf{x}) \leq \frac{r^2 - |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|^2}{n\omega_n r} \int_{\partial B} \frac{u(\mathbf{y})}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^n} d\mathbf{y}, \quad \mathbf{x} \in B. \quad (*)$$

( $\Leftarrow$ ) Die Identität (\*) gilt insbesondere für den Mittelpunkt einer jeden zulässigen Kugel  $B$ , und deshalb  $u$  ist (nach Definition) subharmonisch in  $\Omega$  ist.

( $\Rightarrow$ ) Sei  $u$  subharmonisch und  $B$  eine beliebige offene Kugel mit  $\bar{B} \subset \Omega$ . Die Funktion

$$w(\mathbf{x}) := u(\mathbf{x}) - u_B(\mathbf{x}) = u(\mathbf{x}) - \underbrace{\frac{r^2 - |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|^2}{n\omega_n r} \int_{\partial B} \frac{u(\mathbf{y})}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^n} d\mathbf{y}}_{\substack{\text{harmonisch in } B, \\ \text{gleich } u \text{ auf } \partial B}}$$

ist subharmonisch in  $B$  und verschwindet auf  $\partial B$ . Dem Maximumsprinzip zufolge gilt  $w \leq 0$  auf  $\bar{B}$ , und dies impliziert (\*).  $\square$

**Korollar (*Hinreichendes Kriterium für Subharmonizität*)**

Sei  $u \in C(\overline{\Omega})$  eine gegebene Funktion, so dass

$$u(\mathbf{x}_0) \leq \bar{u}_r(\mathbf{x}_0)$$

für jedes  $\mathbf{x}_0 \in \Omega$  und alle hinreichend kleinen Radien  $r > 0$  gilt. Dann ist  $u$  subharmonisch in  $\Omega$ .

**Beweis**

Zunächst bemerken wir, dass jede Funktion  $u$ , die den Voraussetzungen genügt, das starke Maximumsprinzip erfüllt (siehe die Bemerkung unter dem Beweis des starken Maximumsprinzips).

Sei  $B$  nun eine beliebige offene Kugel mit  $\overline{B} \subset \Omega$ . Die Funktion  $w = u - u_B$  erfüllt auch die Voraussetzungen und damit das starke Maximumsprinzip. Deshalb gilt

$$w(\mathbf{x}) \leq \max_{\mathbf{y} \in \partial B} w(\mathbf{y}) = 0 \quad \text{für alle } \mathbf{x} \in B.$$

d.h. es gilt  $u \leq u_B$  in  $B$ . In  $\Omega \setminus B$  gilt wiederum  $u = u_B$ , d.h. wir haben  $u \leq u_B$  in ganz  $\Omega$ . Da  $B$  beliebig war, folgt die Behauptung aus dem vorherigen Lemma.  $\square$

**Satz (*Subharmonizität harmonischer Lifts*)**

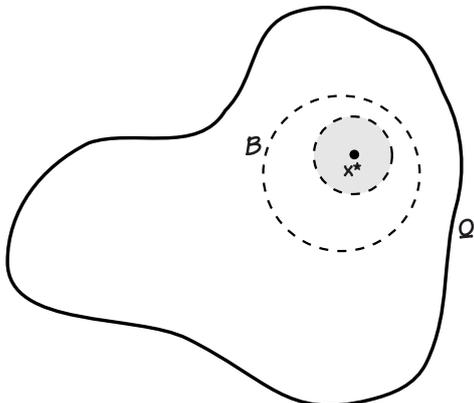
Sei  $u \in C(\overline{\Omega})$  subharmonisch und  $B$  eine offene Kugel mit  $\overline{B} \subset \Omega$  liegt. Dann ist  $u_B$  subharmonisch.

**Beweis**

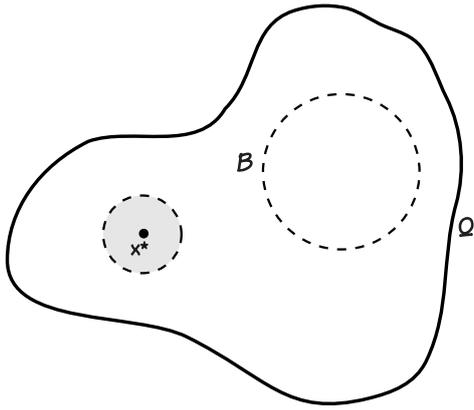
Es genügt zu zeigen, dass für gegebenes  $\mathbf{x}^* \in \Omega$  die Ungleichung

$$u_B(\mathbf{x}^*) \leq \overline{(u_B)}_\rho(\mathbf{x}^*) \quad (\#)$$

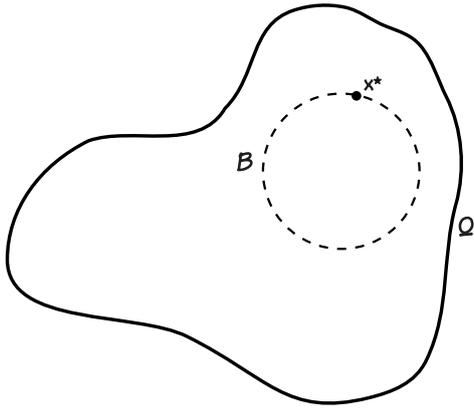
für alle hinreichend kleinen Radien  $\rho$  gilt. Dazu betrachten wir die folgenden drei Fälle.



Für  $\mathbf{x}^* \in B$  gilt  $(\#)$  für alle  $\rho$  mit  $B_\rho(\mathbf{x}^*) \subset B$ , weil  $u_B$  harmonisch in  $B$  ist.



Für  $r \in \Omega \setminus \bar{B}$  gilt (#) für alle  $\rho$  mit  $B_\rho(x^*) \subset \Omega \setminus \bar{B}$ , weil  $u_B = u$  in  $\Omega \setminus B$ .



Für  $x^* \in \partial B$  und alle  $\rho$  mit  $\bar{B}_\rho(x^*) \subset \Omega$  gilt

$$\begin{aligned} u_B(x^*) &= u(x^*) \\ &\leq \bar{u}_\rho(x^*) \quad (\text{weil } u \text{ subharmonisch}) \\ &\leq \overline{(u_B)_\rho}(x^*) \quad (\text{weil } u \leq u_B). \end{aligned}$$

□

**Lemma (Vergleichsprinzip für harmonische Lifts)**

Für  $u, w \in C(\bar{\Omega})$  gelte  $u \leq w$  in  $\Omega$ . Dann gilt  $u_B \leq w_B$  für jede offene Kugel  $B$  mit  $\bar{B} \subset \Omega$ .

**Beweis**

Die Funktionen  $u_B$  und  $w_B$  sind harmonisch in  $B$  mit  $u \leq w$  auf  $\partial B$ . Aus dem Maximumprinzip folgt daher  $u \leq w$  auf  $\bar{B}$ . Auf  $\Omega \setminus \bar{B}$  ist die Behauptung trivialerweise erfüllt. □

**4.5.2 Die Perronsche Methode**

**Definition**

Die **Perron-Klasse** ist die Menge

$$P_g = \{u \in C(\bar{\Omega}) : u \text{ ist subharmonisch in } \Omega \text{ mit } u(x) \leq g(x) \text{ für alle } x \in \partial\Omega\}.$$

Beachte, dass  $P_g$  nicht leer ist: Die konstante Funktion  $u(x) = m$ , wobei  $m = \min_{x \in \partial\Omega} g(x)$  ist, liegt in  $P_g$ .

Wir definieren nun eine Funktion  $u_g : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$  durch die Formel

$$u_g(x) = \sup_{u \in P_g} u(x).$$

(Die Rechnung

$$\underbrace{u(\mathbf{x}) \leq \max_{\mathbf{y} \in \partial\Omega} u(\mathbf{y}) \leq \max_{\mathbf{y} \in \partial\Omega} g(\mathbf{y})}_{\text{Maximumsprinzip}}, \quad u \in P_g, \mathbf{x} \in \bar{\Omega}$$

zeigt, dass das Supremum existiert.)

Wir wollen nun die folgenden Eigenschaften zeigen:

- $u_g$  ist harmonisch in  $\Omega$ .
- Es gilt  $u_g \in C(\bar{\Omega})$  und  $u_g(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x})$  für alle  $\mathbf{x} \in \partial\Omega$ .

Sofern dies gelingt, haben wir die Existenz einer Lösung des Randwertproblems (1), (2) bewiesen. Die Eindeutigkeit folgt dann aus dem Maximum-Prinzip.

### Satz

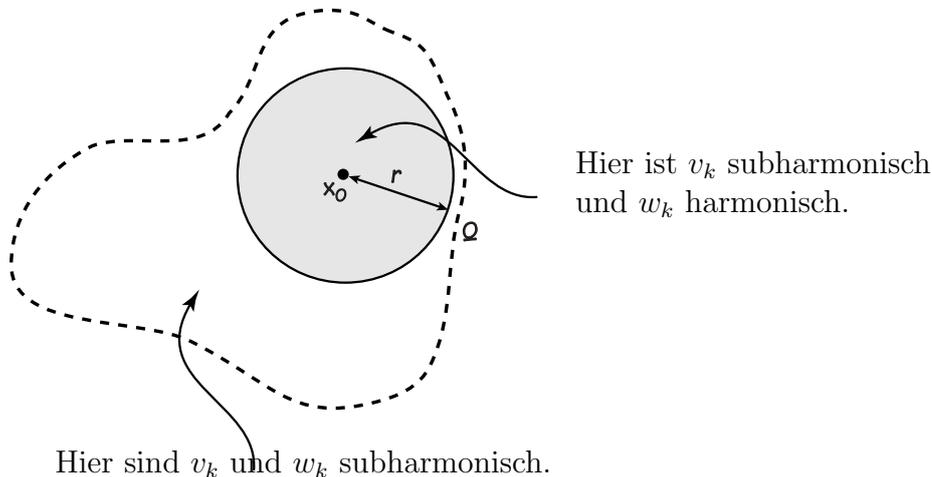
Es gilt  $u_g \in C^2(\Omega)$  mit

$$\Delta u(\mathbf{x}) = 0$$

für alle  $\mathbf{x} \in \Omega$ .

### Beweis

Wir fixieren zunächst eine beliebige Kugel  $B = B_r(\mathbf{x}_0)$  mit  $\bar{B} \subset \Omega$ .



Aus der Definition von  $u_g(\mathbf{x}_0)$  folgt die Existenz einer **maximierenden Folge**  $\{u_k(\mathbf{x}_0)\}_{k \in \mathbb{N}}$  (die von  $\mathbf{x}_0$  anhängen darf) mit den Eigenschaften

- $u_k \in P_g$  für alle  $k$ ,
- $u_k(\mathbf{x}_0) \leq u_{k+1}(\mathbf{x}_0)$  für alle  $k$ ,
- $\lim_{k \rightarrow \infty} u_k(\mathbf{x}_0) = u_g(\mathbf{x}_0)$ .

Wir führen nun durch

$$v_k = \max\{u_1, \dots, u_k\}$$

eine weitere Funktionenfolge  $\{v_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset C(\overline{\Omega})$  ein. Diese hat, nach Konstruktion, die folgenden Eigenschaften:

- $v_k \in P_g$  für alle  $k$  (denn  $v_k$  ist subharmonisch in  $\Omega$  mit  $v_k \leq g$  auf  $\partial\Omega$ ),
- $v_k \leq v_{k+1}$  für alle  $k$ ,
- $\lim_{k \rightarrow \infty} v_k(\mathbf{x}_0) = u_g(\mathbf{x}_0)$  (denn es gilt  $v_k(\mathbf{x}_0) = u_k(\mathbf{x}_0)$ ).

Wir betrachten schließlich die Funktionenfolge  $\{w_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset C(\overline{\Omega})$ , wobei  $w_k$  die harmonische Liftung von  $v_k$  auf  $B$  ist, d.h. wir haben  $w_k = (v_k)_B$ . Für diese Folge gilt:

- $w_k$  ist harmonisch in  $B$  und subharmonisch in  $\Omega$  für alle  $k$ ,
- $v_k \leq w_k \leq w_{k+1}$  in  $\Omega$  für alle  $k$  (dies folgt aus  $v_k \leq v_{k+1}$  und dem Maximum-Prinzip),
- $w_k \in P_g$  für alle  $k$  (denn  $w_k$  ist subharmonisch in  $\Omega$  mit  $w_k = v_k \leq g$  auf  $\partial\Omega$ )
- $w_k \leq u_g$  in  $\Omega$  für alle  $k$  (weil  $w_k \in P_g$ ).
- $\lim_{k \rightarrow \infty} w_k(\mathbf{x}_0) = u_g(\mathbf{x}_0)$ .

Diese Eigenschaften implizieren insbesondere, dass der punktweise Grenzwert

$$w(\mathbf{x}) = \lim_{k \rightarrow \infty} w_k(\mathbf{x}_0)$$

für alle  $\mathbf{x} \in \Omega$  existiert, und nach Konstruktion gilt

$$w_k(\mathbf{x}) \leq u_g(\mathbf{x}) \quad \text{für alle } \mathbf{x} \in \Omega.$$

Der zweite Harnacksche Konvergenzsatz (angewendet auf  $w_k$  eingeschränkt auf  $B$ ) impliziert nun, dass  $w$  harmonisch in  $B$  ist.

Wir wollen nun durch Widerspruch zeigen, dass  $w = u_g$  in  $B$  gilt. Nehmen wir also an, es existiert ein  $\mathbf{x}^* \in B$  mit  $w(\mathbf{x}^*) < u_g(\mathbf{x}^*)$ . Dann gibt es, nach Definition von  $P_g$ , eine Funktion

$$U \in P_g \quad \text{mit} \quad w(\mathbf{x}^*) < U(\mathbf{x}^*) < u_g(\mathbf{x}_0).$$

Wir betrachten nun für jedes  $k \in \mathbb{N}$  die in  $\Omega$  subharmonischen Funktionen  $V_k = \max\{U, v_k\}$  und deren harmonische Liftungen  $W_k = (V_k)_B$ . Analog zu den obigen Argumenten können wir die folgenden Eigenschaften ableiten:

- $W_k$  ist harmonisch in  $B$  für alle  $k$ ,
- $V_k \leq V_{k+1}$  und  $V_k \leq W_k \leq W_{k+1}$  für alle  $k$ ,
- $W_k \in P_g$  für alle  $k$ ,
- $w_k \leq W_k \in P_g$  für alle  $k$  (weil  $v_k \leq V_k$ ),

- $\lim_{k \rightarrow \infty} W_k(\mathbf{x}_0) = u_g(\mathbf{x}_0)$ .

Insbesondere existiert  $W$  als punktweiser Grenzwert von  $\{W_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  auf  $\Omega$ , und der zweite Harnacksche Konvergenzsatz zeigt wieder, dass  $W$  harmonisch auf  $B$  ist. Außerdem gilt nach Konstruktion

$$W(\mathbf{x}^*) \geq U(\mathbf{x}^*) > w(\mathbf{x}^*) \quad \text{und} \quad W(\mathbf{x}_0) = w(\mathbf{x}_0) = u_g(\mathbf{x}_0)$$

sowie

$$w(\mathbf{x}) \leq W(\mathbf{x}) \leq u_g(\mathbf{x}) \quad \text{für alle } \mathbf{x} \in B.$$

Die Funktion  $w - W$  ist also harmonisch und nichtpositiv auf  $B$  und nimmt ihr Maximum in dem inneren Punkt  $\mathbf{x}_0$  an. Das starke Maximum-Prinzip liefert deshalb  $W = w$  auf  $B$ . Dies widerspricht aber  $W(\mathbf{x}^*) > w(\mathbf{x}^*)$  und deshalb muss unsere Annahme  $w \neq u_g$  auf  $B$  falsch sein.

Wir haben nun gezeigt, dass  $u_g = w$  in  $B$  gilt und dass folglich  $u_g$  harmonisch in  $B$  ist. Da  $B$  aber eine beliebige Kugel mit  $\overline{B} \subset \Omega$  war, folgt die Behauptung.  $\square$

Wir müssen nun noch klären, ob die Funktion  $u_g$  stetig in  $\overline{\Omega}$  ist und die Randbedingung  $u_g = g$  auf  $\partial\Omega$  erfüllt. Das nächste Beispiel zeigt, dass dies nicht immer der Fall ist.

### Beispiel

Betrachten Sie das Randwertproblem

$$\begin{aligned} u_{xx} + u_{yy} &= 0 && \text{für } 0 < x^2 + y^2 < 1, \\ u &= 0 && \text{für } x^2 + y^2 = 1, \\ u &= -1 && \text{für } (x, y) = (0, 0), \end{aligned}$$

und zeigen Sie, dass die Perron-Funktion  $u_g$  nicht stetig im Nullpunkt ist.

### Lösung

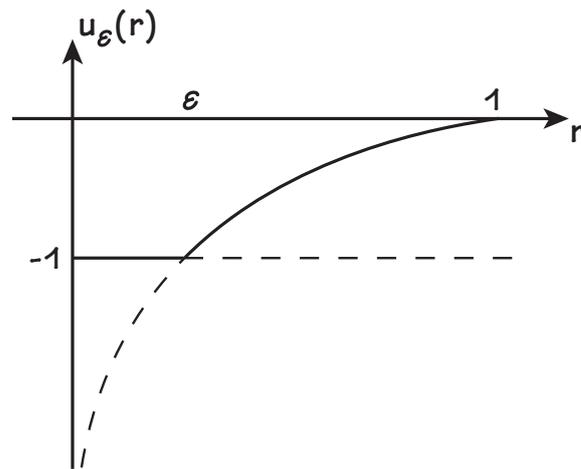
Für jedes  $0 < \varepsilon < 1$  sei

$$u_\varepsilon(r) = \begin{cases} -1, & 0 \leq r < \varepsilon, \\ -\frac{\log r}{\log \varepsilon}, & \varepsilon \leq r \leq 1, \end{cases}$$

wobei  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ . Diese Funktion ist stetig auf  $\overline{B}_1(0, 0)$ , erfüllt die Randbedingungen im Mittelpunkt und am Einheitskreis. Ausserdem ist  $u_\varepsilon$  subharmonisch für  $0 < x^2 + y^2 < 1$ , denn es gilt

$$u_\varepsilon(r) = \max \left\{ \underbrace{-1}_{\text{harmonisch}}, \underbrace{-\frac{\log r}{\log \varepsilon}}_{\text{harmonisch}} \right\},$$

Insbesondere gilt  $u_\varepsilon \in P_g$ .



Die Funktion  $u_g$  erfüllt nun einerseits  $u_g(0,0) = \sup_{u \in P_g} u(0,0) = -1$ . Auf der anderen Seite gilt

$$u_g(x,y) = \sup_{u \in P_g} u(x,y) \geq \sup_{0 < \varepsilon < 1} u_\varepsilon\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right) = 0$$

für  $0 < x^2 + y^2 < 1$ , d.h.  $u_g$  ist nicht stetig in  $(0,0]$ .  $\square$

Aus diesem Beispiel schließen wir, dass wir zusätzliche Bedingungen an den Rand  $\partial\Omega$  stellen müssen, um eine Perron-Lösung der Klasse  $C(\bar{\Omega})$  zu erhalten.

### Definition

Eine Funktion  $w \in C(\bar{\Omega})$  heißt **Barriere-Funktion** im Punkt  $\mathbf{x}_0 \in \partial\Omega$ , falls sie folgende Eigenschaften besitzt:

1.  $w$  ist (im Mittelwertsinne) superharmonisch in  $\Omega$ ,
2.  $w(\mathbf{x}_0) = 0$ ,
3.  $w(\mathbf{x}) > 0$  für  $\mathbf{x} \in \bar{\Omega} \setminus \{\mathbf{x}_0\}$ .

Ein Punkt  $\mathbf{x}_0 \in \partial\Omega$  heißt **regulärer Randpunkt**, falls es eine Barriere-Funktion im Punkt  $\mathbf{x}_0$  gibt.

### Satz (*Randwert der Perron-Lösung in regulären Punkten*)

Für jeden regulären Randpunkt  $\mathbf{x}_0 \in \partial\Omega$  gilt

$$\lim_{\substack{\mathbf{y} \rightarrow \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{y} \in \Omega}} u_g(\mathbf{y}) = g(\mathbf{x}_0)$$

sofern  $g$  stetig auf  $\partial\Omega$  ist.

**Beweis**

Sei  $w$  eine Barriere-Funktion in  $\mathbf{x}_0$  und  $\varepsilon > 0$  beliebig. Da  $g$  stetig im Punkt  $\mathbf{x}_0$  ist, existiert  $\delta > 0$ , so dass

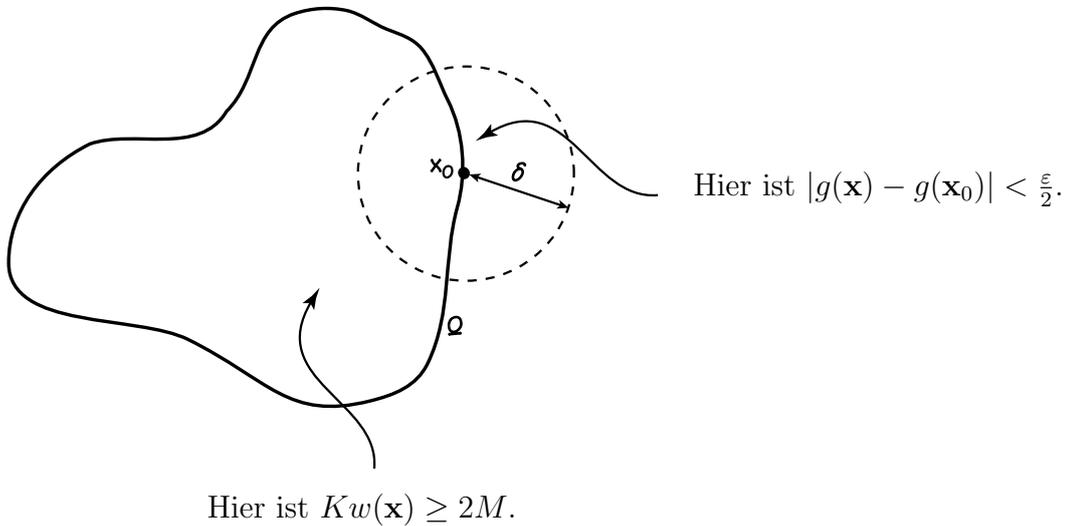
$$\mathbf{x} \in \partial\Omega, |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| < \delta \quad \Rightarrow \quad |g(\mathbf{x}) - g(\mathbf{x}_0)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Weil außerdem  $w$  positiv und stetig auf  $\overline{\Omega} \setminus \{\mathbf{x}_0\}$  ist, existiert  $m > 0$ , so dass

$$\mathbf{x} \in \overline{\Omega}, |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| \geq \delta \quad \Rightarrow \quad w(\mathbf{x}) \geq m.$$

Es sei nun  $M = \sup_{\mathbf{x} \in \partial\Omega} |g(\mathbf{x})|$  und  $K = 2M/m$ , so dass

$$\mathbf{x} \in \overline{\Omega}, |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| \geq \delta \quad \Rightarrow \quad Kw(\mathbf{x}) \geq 2M.$$



*Schritt 1, Abschätzung nach unten:* Wir definieren nun  $f_1 \in C(\overline{\Omega})$  durch die Formel

$$f_1(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x}_0) - \frac{\varepsilon}{2} - Kw(\mathbf{x}).$$

Diese Funktion  $f_1$  ist nach Konstruktion subharmonisch in  $\Omega$  und besitzt die folgenden Eigenschaften:

- Für  $\mathbf{x} \in \partial\Omega$  mit  $|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| \geq \delta$  gilt

$$f_1(\mathbf{x}) = \underbrace{g(\mathbf{x}_0)}_{\leq M} + \underbrace{\left(-\frac{\varepsilon}{2}\right)}_{< 0} + \underbrace{(-Kw(\mathbf{x}))}_{\leq -2M} \leq -M \leq g(\mathbf{x}).$$

- Für  $\mathbf{x} \in \partial\Omega$  mit  $|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| < \delta$  gilt

$$f_1(\mathbf{x}) = \underbrace{g(\mathbf{x}_0) - \frac{\varepsilon}{2}}_{< g(\mathbf{x})} + \underbrace{(-Kw(\mathbf{x}))}_{\leq 0} \leq g(\mathbf{x}).$$

Insgesamt gilt  $f_1(\mathbf{x}) \leq g(\mathbf{x})$  für alle  $\mathbf{x} \in \partial\Omega$  und damit  $f_1 \in P_g$ .

Die Stetigkeit von  $w$  im Punkt  $\mathbf{x}_0$  impliziert außerdem die Existenz von  $\Delta > 0$ , so dass

$$\mathbf{x} \in \Omega, |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| < \Delta \quad \Rightarrow \quad w(\mathbf{x}) < \frac{\varepsilon}{2K},$$

und dies impliziert

$$u_g(\mathbf{x}) \geq f_1(\mathbf{x}) \geq g(\mathbf{x}_0) - \varepsilon \quad \text{für alle } \mathbf{x} \in \Omega \text{ mit } |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| < \Delta.$$

*Schritt 2: Abschätzung nach oben* : Sei  $v \in P_g$  beliebig und sei  $f_2 \in C(\overline{\Omega})$  definiert durch

$$f_2(\mathbf{x}) = v(\mathbf{x}) - \left( g(\mathbf{x}_0) + \frac{\varepsilon}{2} + Kw(\mathbf{x}) \right).$$

Dann ist  $f_2$  subharmonisch in  $\Omega$  und analog zu oben zeigen wir, dass  $f_2$  nichtpositiv auf dem Rand  $\partial\Omega$  ist. Dem Maximumsprinzip zufolge ist also  $f_2$  nichtpositiv auf  $\overline{\Omega}$  und damit gilt

$$\begin{aligned} u_g(\mathbf{x}) &= \sup_{v \in P_g} v(\mathbf{x}) \\ &\leq g(\mathbf{x}_0) + \frac{\varepsilon}{2} + Kw(\mathbf{x}) \\ &\leq g(\mathbf{x}_0) + \varepsilon \end{aligned}$$

für alle  $\mathbf{x} \in \Omega$  mit  $|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| < \Delta$ .

Insgesamt haben wir damit die Implikation

$$\mathbf{x} \in \overline{\Omega}, |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| < \Delta \quad \Rightarrow \quad |u_g(\mathbf{x}) - g(\mathbf{x}_0)| < \varepsilon.$$

gezeigt, und die Behauptung folgt da  $\varepsilon > 0$  beliebig war.  $\square$

### **Korollar (*Randregularität ist hinreichend und notwendig*)**

Das Anfangswertproblem (1)–(2) ist für gegebenes  $g \in C(\partial\Omega)$  genau dann eine Lösung  $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ , wenn alle Punkte von  $\partial\Omega$  regulär sind.

### **Beweis**

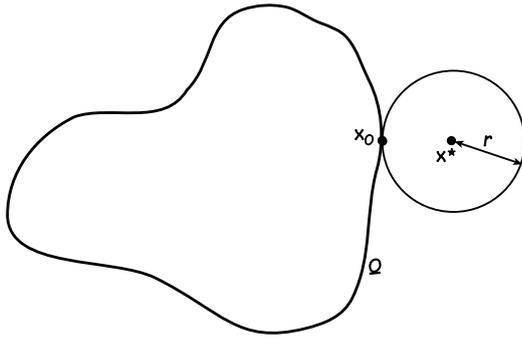
( $\Leftarrow$ ) Die Perron-Lösung  $u_g$  ist eine Lösung aus der Klasse  $C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ .

( $\Rightarrow$ ) Für jedes  $\mathbf{x}_0 \in \partial\Omega$  wählen wir  $g \in C(\partial\Omega)$  mit  $g(\mathbf{x}_0) = 0$  und  $g > 0$  auf  $\partial\Omega \setminus \{\mathbf{x}_0\}$  (z.B.  $g(\mathbf{x}) = |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|$ ). Die entsprechende Perron-Lösung  $u_g \in C(\overline{\Omega})$  des Anfangswertproblems existiert nach Voraussetzung und erfüllt dem starken Minimumsprinzip zufolge  $u_g > 0$  auf  $\Omega$ . Insbesondere ist  $u_g$  Barriere-Funktion im Punkt  $\mathbf{x}_0$ .  $\square$

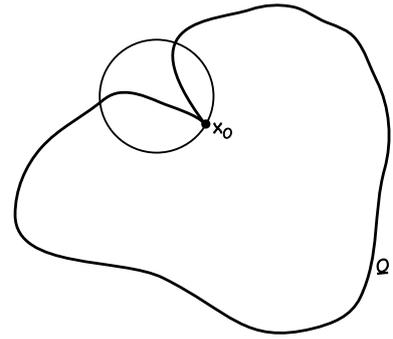
Es gibt geometrische Kriterien, die die Existenz einer Barriere-Funktion garantieren.

### **Definition**

Der Randpunkt  $\mathbf{x}_0 \in \partial\Omega$  erfüllt die **äußere Kugelbedingung**, falls es einen Punkt  $\mathbf{x}^* \in \mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega}$  und einen Radius  $r > 0$  gibt, so dass  $\overline{B}_r(\mathbf{x}^*) \cap \overline{\Omega} = \{\mathbf{x}_0\}$  gilt.



Hier ist die äußere Kugelbedingung im Punkt  $\mathbf{x}_0$  erfüllt.



Hier ist die äußere Kugelbedingung im Punkt  $\mathbf{x}_0$  nicht erfüllt.

**Lemma (*Kugelbedingung impliziert Rand-Regularität*)**

Der Randpunkt  $\mathbf{x}_0 \in \partial\Omega$  erfülle die äußere Kugelbedingung. Dann ist  $\mathbf{x}_0$  ein regulärer Randpunkt.

**Beweis**

Für  $n > 2$  definiert die Formel

$$w(\mathbf{x}) = \frac{1}{|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}^*|^{n-2}} - \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}^*|^{n-2}}$$

eine Barriere-Funktion im Punkt  $\mathbf{x}_0 \in \partial\Omega$ :

- $w$  ist stetig auf  $\overline{\Omega}$  mit  $w(\mathbf{x}_0) = 0$ .
- $w$  ist harmonisch in  $\mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{x}^*\}$  und insbesondere superharmonisch in  $\Omega$ .
- Für jedes  $\mathbf{x} \in \overline{\Omega} \setminus \{\mathbf{x}_0\}$  hat das Dreieck, das durch  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{x}_0$  und  $\mathbf{x}^*$  aufgespannt wird, einen stumpfen Winkel bei  $\mathbf{x}_0$ . Damit gilt

$$|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}^*| < |\mathbf{x} - \mathbf{x}^*|$$

d.h.  $w(\mathbf{x}) > 0$ .

Für  $n = 2$  ist die entsprechende Barriere-Funktion  $w(\mathbf{x}) = \log |\mathbf{x} - \mathbf{x}^*| - \log |\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}^*|$ .  $\square$

**Bemerkung**

1. Die äußere Kugelbedingung ist sehr restriktiv. Es gibt schwächere Kriterien für die Existenz einer Barriere-Funktion.
2. Die Bedingung, dass ein Randpunkt regulär ist, ist eine **lokale** Bedingung.

**Definition**

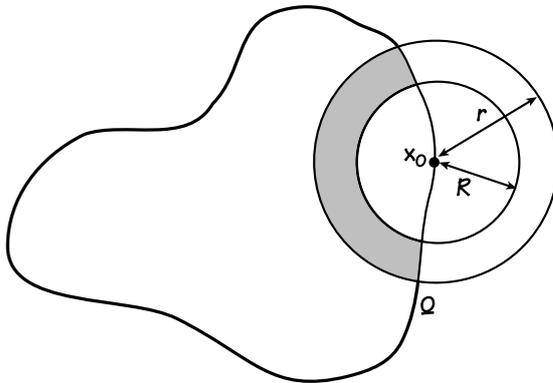
Eine Funktion  $w$  heißt **lokale Barriere-Funktion** im Punkt  $\mathbf{x}_0 \in \partial\Omega$ , falls es eine offene Kugel  $B_r(\mathbf{x}_0)$  gibt, so dass  $w$  eine Barriere-Funktion im Punkt  $\mathbf{x}_0 \in \partial(\Omega \cap B_r(\mathbf{x}_0))$  ist.

**Lemma (Lokale Barriere-Funktionen implizieren schon Randregularität)**

Es sei  $w$  eine lokale Barriere-Funktion im Punkt  $\mathbf{x}_0 \in \partial\Omega$ . Dann existiert eine Barriere-Funktion in diesem Punkt.

**Beweis**

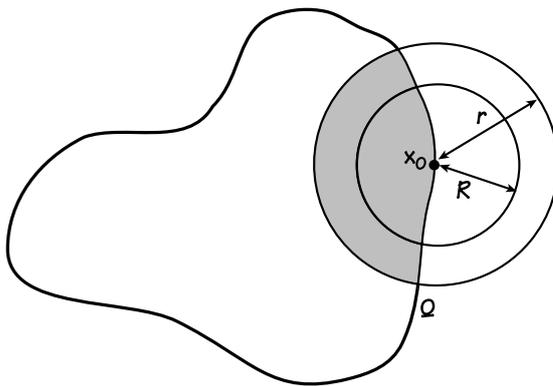
Seien  $\mathbf{x}_0$ ,  $r > 0$ , und  $w$  wie in der Definition einer lokalen Barriere-Funktion. Wir wählen nun einen Radius  $R$  mit  $0 < R < r$  und setzen  $m = \min\{w(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in (\overline{B}_r(\mathbf{x}_0) \setminus B_R(\mathbf{x}_0)) \cap \overline{\Omega}\}$ .



$m$  ist das Minimum von  $w$  über die schraffierte Region. Insbesondere gilt hier  $m \leq w$  und daher  $\min(m, w) = m$ .

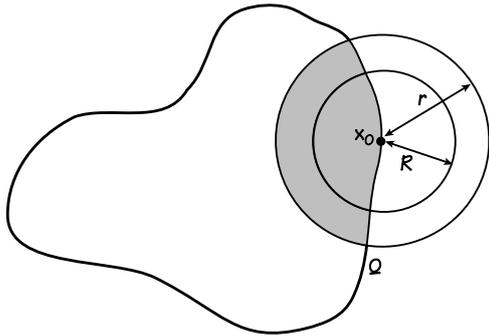
Außerdem betrachten wir die Funktion  $W$  mit

$$W(\mathbf{x}) = \begin{cases} \min(m, w(\mathbf{x})), & \mathbf{x} \in \overline{\Omega} \cap B_r(\mathbf{x}_0), \\ m, & \mathbf{x} \in \overline{\Omega} \setminus B_r(\mathbf{x}_0) \end{cases} .$$

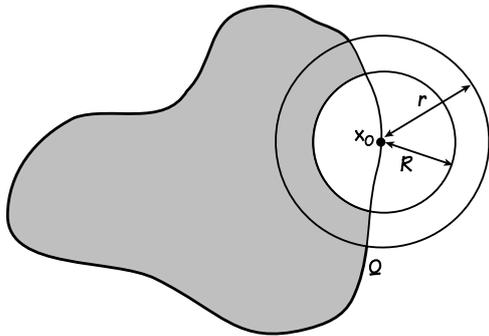


$W$  ist  $\min(m, w)$  in der schraffierten Region und  $m$  im nichtschraffierten Teil von  $\Omega$ .  $W$  ist stetig in  $\Omega$ , da  $\min(m, w) = m$  im Teil der schraffierten Region zwischen den beiden Kugeln ist.

Wir zeigen nun, dass  $W$  eine Barriere-Funktion im Punkt  $\mathbf{x}_0 \in \partial\Omega$  ist. Zunächst bemerken wir, dass  $W$  stetig auf  $\overline{\Omega}$  und positiv auf  $\overline{\Omega} \setminus \{\mathbf{x}_0\}$  ist. Ausserdem gilt  $W(\mathbf{x}_0) = \min\{m, 0\} = 0$ . Bzgl. Superharmonizität bemerken wir zunächst:



In dieser Region ist  $W$  das Minimum zweier superharmonischer Funktionen und daher selbst superharmonisch.



In dieser Region ist  $W$  konstant (gleich  $m$ ) und daher harmonisch.

Die Superharmonizität auf ganz  $\Omega$  kann nun leicht mit Hilfe von sphärischen Mittel gezeigt werden (analog zum Beweis der Subharmonizität von harmonischen Liftungen).

□